

Trần Bá Hà

Phương pháp giải TOÁN TRẮC NGHIỆM CÁC VẤN ĐỀ CHỦ YẾU GIẢI TÍCH

• **Dành cho HS khối 12**

- Ôn tập và rèn luyện kỹ năng giải các dạng Toán trắc nghiệm
- Chuẩn bị cho các kì thi tốt nghiệp, tuyển sinh ĐH-CĐ 2008-2009 bằng phương pháp trắc nghiệm khách quan của Bộ GD&ĐT.

- * Đạo hàm - Khảo sát hàm số
- * Nguyên hàm - Tích phân
- * Giải tích - Tổ hợp
- * Số phức

+ 30 vấn đề cơ bản
+ 650 câu hỏi trắc nghiệm
+ 350 bài tập tự luận



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Trần Bá Hà

Giáo viên chuyên Toán

*Tu nghiệp tại: Institut de Recherche
Pour L'enseignement des Mathématiques
Paris-France*

Phương pháp giải TOÁN TRẮC NGHIỆM CÁC VẤN ĐỀ CHỦ YẾU GIẢI TÍCH 12

• **Dành cho HS khối 12**

- **Ôn tập và rèn luyện kỹ năng giải các dạng Toán trắc nghiệm**
- **Chuẩn bị cho các kì thi tốt nghiệp, tuyển sinh ĐN-CĐ 2008-2009 bằng phương pháp trắc nghiệm khách quan của Bộ GD&ĐT.**

** Đạo hàm - Khảo sát hàm số*

** Nguyên hàm - Tích phân*

** Giải tích - Tổ hợp*

** Số phức*

+ 30 vấn đề cơ bản

+ 650 câu hỏi trắc nghiệm

+ 350 bài tập tự luận

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
ĐT (04) 9715013; (04) 7685236. Fax: (04) 9714899

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập NGUYỄN BÁ THÀNH

Biên tập nội dung

MINH HẢI

Sửa bản in

HOÀNG VĨNH, THANH NHÀN

Trình bày bìa

SƠN KỲ

**PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN TRẮC NGHIỆM CÁC VẤN ĐỀ CHỦ YẾU
GIẢI TÍCH 12**

Mã số: 1L - 192Đ/H2007

In 2.000 cuốn, khổ 16 × 24 cm tại Công ty cổ phần Văn hoá Tân Bình.

Số xuất bản: 681- 2007/CXB/14 - 104/ĐHQG HN, ngày 24/08/2007.

Quyết định xuất bản số: 441/LK/XB

In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2007

Lời nói đầu

Nhằm giúp học sinh phương pháp giải các bài tập trắc nghiệm về các vấn đề cơ bản của môn giải tích 12. Chúng tôi biên soạn tập sách: "Phương pháp giải toán trắc nghiệm về các vấn đề chủ yếu giải tích 12". Sách được trình bày theo từng vấn đề, mỗi vấn đề bao gồm:

Phần tóm tắt lý thuyết

Các dạng toán cơ bản

Bài tập tự luận (có hướng dẫn giải) minh họa các dạng toán cơ bản

Bài tập trắc nghiệm (có hướng dẫn giải)

Cuối mỗi chương còn có phần bài tập trắc nghiệm tổng hợp (có đáp án) để học sinh tự rèn luyện.

Tập sách này bao gồm 5 chương trong đó chúng tôi chọn 350 bài tập cơ bản giải bằng tự luận và 650 bài tập trắc nghiệm có hướng dẫn giải. Học sinh nên đọc kỹ phần tóm tắt lý thuyết - Phương pháp giải - Một số bài tập cơ bản bằng phương pháp tự luận trước khi làm phần toán trắc nghiệm.

Hy vọng rằng tập sách này giúp ích cho học sinh ôn thi tốt nghiệp THPT và tuyển sinh Đại học - Cao đẳng

Mong sự góp ý của độc giả và đồng nghiệp để lần xuất bản sau cuốn sách được tốt hơn.

Mọi góp ý xin gửi về: Trung tâm sách Giáo dục Alpha - 225^C Nguyễn Tri Phương - Phường 9 - Q.5 - Tp.HCM. ĐT: 08.8107718 - 8547464.

Email: alphabookcenter@yahoo.com

Chân thành cảm ơn.

Trần Bá Hà

Tu nghiệp tại: Institut de Recherche
Pour L'enseignement des Mathématiques
Paris-France

Chương I: ĐẠO HÀM-KHẢO SÁT HÀM SỐ

§1 Vấn đề 1: Đạo Hàm

A. Các dạng cơ bản.

I. Bổ sung giới hạn các hàm số lượng giác – mũ – logarit

1.1. Tóm tắt lý thuyết:

$$\text{Công thức: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$$

1.2. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Tính giới hạn các hàm số sau:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{x}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x - \sin x \cdot \sin 4x}{x^4}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} - 2x}{\tan(x-1)}$$

Hướng dẫn giải:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

$$\text{b) } \text{Biến đổi } \sin^2 2x - 2 \sin x \cdot \sin x = -4 \sin 2x \cdot \sin x \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{3x}{2}.$$

$$\text{Do đó: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x - \sin x \cdot \sin 4x}{x^4} = -4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}.$$

$$= -4 \cdot \frac{3}{2} = -6$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3 (\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} + \sqrt{1 + \sin x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x (1 - \cos x)}{x^3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} + \sqrt{1 + \sin x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{2 \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \left(\frac{x}{2} \right)^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2x}{\tan(x-1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+3) - 4x^2}{\tan(x-1)(\sqrt{x+3} + 2x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)(4x+3)\cos(x-1)}{\sin(x-1)(\sqrt{x+3} + 2x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{\sin(x-1)} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(4x+3) \cdot \cos(x-1)}{\sqrt{x+3} + 2x} = 1 \cdot \left(-\frac{7}{14} \right) = -\frac{7}{14}.
 \end{aligned}$$

Bài 2: Tính giới hạn của các hàm số sau:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\sin x}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x^2} - \cos x}{x^2}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{x+2}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x^2} - \sqrt[3]{1-x^2}}{\ln(1+x^2)}$$

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - 1}{\sin x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\sin x}}{\sin x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{\sin 2x} - 1}{\sin 2x} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos x - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} = 1 \cdot 2 - 1 = 1.
 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x^2 - 1}{x^2} \right) + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Đặt } t = x^2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x^2} - 1}{x^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3^t - 1}{t} = \ln 3.$$

$$\text{Vậy: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x^2} - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} + \ln 3.$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{x+2}$$

$$\text{Đặt } y: \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}.$$

$$\text{Đặt } \frac{2}{x-1} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow x = 2y + 1.$$

$$\text{Do đó: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{x+2} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^{2y+3} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^{2y} \cdot \left(1 + \frac{1}{y} \right)^3$$

$$= \lim_{y \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{y} \right)^y \right]^2 \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^3 = e^2 \cdot 1 = e^2$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x^2} - \sqrt[3]{1-x^2}}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x^2} - 1 + 1 - \sqrt[3]{1-x^2}}{\ln(1+x^2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{2x^2} - 1}{x^2} + \frac{1 - \sqrt[3]{1-x^2}}{x^2}}{\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{e^{2x^2} - 1}{-2x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1-x^2}}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}}$$

$$\text{Vì: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x^2} - 1}{-2x^2} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1-x^2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 + \sqrt[3]{1-x^2} + \sqrt[3]{(1-x^2)^2}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Do đó: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x^2} - \sqrt[3]{1-x^2}}{x^2} = -\frac{5}{3}.$$

1.3. Bài tập Tự Luyện:

Bài 3: Tính các giới hạn sau đây:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2x^2 + 1}}{1 - \cos x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \cdot \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{-2ax}}{\ln(1+x)}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)e^{-x} - 1}{x}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^x$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{3^x - 1}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+x) - \ln a}{x}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$$

Hướng dẫn giải:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2x^2 + 1}}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{1 + \sqrt{2x^2 + 1}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 \cdot 4 = -2.$$

$$b) \text{ Đặt } t = \frac{\pi}{4} - x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} - t.$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \cdot \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + \tan^2 t}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$c) \text{ Biến đổi: } \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x} = \left(\frac{\sqrt{2x+1} - 1 + 1 - \sqrt[3]{x^2+1}}{x} \right) \cdot \left(\frac{x}{\sin x} \right)$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{2x+1} + 1} - \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2} + \sqrt[3]{x^2+1} + 1} \right) \cdot \left(\frac{x}{\sin x} \right)$$

$$\text{Do đó } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} = -\frac{1}{12}.$$

$$d) \text{ Biến đổi: } \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} = \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{\sin^2 x} + \frac{1 - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x (\sqrt{\cos x} + 1)} + \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x (1 + \sqrt[3]{\cos x} + \sqrt[3]{\cos^2 x})}$$

$$\text{Do đó } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} = -\frac{1}{12}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{-2ax}}{\ln(1+x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^{ax} - 1}{x} - \frac{(e^{-2ax} - 1)}{x} \right] \cdot \frac{x}{\ln(1+x)} \\ &= \left[\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{ax} - 1}{ax} \right) a - \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-2ax} - 1}{-2ax} \right) - (-2a) \right] \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+x)} \\ &= (a + 2a) \cdot 1 = 3a \end{aligned}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)e^{-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -\left(\frac{e^{-x} - 1}{-x} \right) + \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} = -1 + 1 = 0.$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{x^2} \right]^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{3^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \frac{x}{3^x - 1} = \frac{1}{\ln 3}.$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+x) - \ln a}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln a \left(1 + \frac{x}{a} \right) - \ln a}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln a \left(1 + \frac{x}{a} \right)}{a \cdot \frac{x}{a}} = \frac{1}{a}.$$

$$\text{j) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{2x} - 1}{2x}}{\frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{\sin x}{x}} = 2.$$

Bài 4: Tính các giới hạn sau:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)}{\sqrt{3} - 2\cos x}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{(1 - \sin^2 x)^2}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1 - x}$$

Bài 5: Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{7x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\lg x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\tan x)}{1 - \cot x}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{mx}$$

II. Tính đạo hàm bằng định nghĩa – ý nghĩa hình học của đạo hàm

2.1. Tóm tắt lý thuyết:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên (a, b) , $x_0 \in (a, b)$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x}; f'(x_0^-) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Nếu $f(x)$ có đạo hàm tại $x = x_0$ thì $f(x)$ liên tục tại $x = x_0$.

Hệ số góc tiếp tuyến tại điểm $(x_0, f(x_0))$ bằng giá trị đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại $x = x_0$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(x_0, f(x_0))$ là:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Điều kiện cần và đủ để 2 đường cong $y = f(x)$ và $y = g(x)$ tiếp xúc với nhau

$$\text{tại } x = x_0 \text{ là } \begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$$

2.2. Bài tập Áp dụng:

Bài 1:

a) Chứng minh hàm số $y = \sqrt[3]{x^2}$ không có đạo hàm tại $x = 0$.

b) Chứng minh rằng hàm số $y = \frac{|x|}{1+x}$ liên tục tại $x = 0$ nhưng không có đạo hàm tại $x = 0$.

c) Dùng định nghĩa tính giá trị của đạo hàm của hàm số $y = \frac{x}{1+|x|}$ tại $x = 0$.

Hướng dẫn giải:

a) Ta có: $\Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) = \sqrt[3]{(\Delta x)^2}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty; \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$$

Do đó không tồn tại $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow$ không tồn tại đạo hàm tại $x = 0$.

b) Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{1+x_0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{1+x} = f(0) = 0 \Rightarrow$ Hàm số liên tục tại $x = 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta y|}{\Delta x} = \frac{1}{1+\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1; \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$$

Do đó không tồn tại $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ tại $x = 0$ nên không có đạo hàm tại $x = 0$.

c) Ta có: $f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{1+\Delta x} - 0 \right) \frac{1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{1+|\Delta x|} = 1$

Vậy $f'(0) = 1$.

Bài 2:

a) Chứng minh rằng hàm số:

$$y = \begin{cases} x^3 & \text{khi } x < 0 \\ x^2 & \text{khi } x \geq 0 \end{cases} \text{ có đạo hàm tại } x = 0$$

b) Tìm a và b để hàm số

$$y = \begin{cases} x^3 & \text{khi } x, x_0 \text{ liên tục và có đạo hàm tại } x = x_0 \\ ax + b & \text{khi } x > x_0 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

a) Ta có: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{(0 + \Delta x)^2 - (0)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \Delta x = 0$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{(0 + \Delta x)^3 - (0)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} (\Delta x)^2 = 0$$

Do đó $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0$.

b) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} (ax + b) = ax_0 + b$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} x^3 = x_0^3$$

Để hàm số liên tục tại $x = x_0$ ta phải có: $x_0^3 = ax_0 + b$ (1)

Ta có: $\lim_{\Delta x \rightarrow x_0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow x_0^+} \frac{a(x_0 + \Delta x) + b - (ax_0 + b)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow x_0^+} a \frac{\Delta x}{\Delta x} = a$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow x_0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow x_0^-} \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} = 3x_0^2$$

Để hàm số có đạo hàm tại $x = x_0$ ta phải có: $a = 3x_0^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta được:
$$\begin{cases} a = 3x_0^2 \\ b = -2x_0^3 \end{cases}$$

Bài 3: Tính đạo hàm các hàm số sau:

a) $y = x|x|$

b) $y = \begin{cases} 1-x & \text{khi } x \leq 0 \\ e^{-x} & \text{khi } x > 0 \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

a) Ta có: $y = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

Khi $x > 0$: $f'(x) = 2x$

Khi $x < 0$: $f'(x) = -2x$

Tại $x = 0$ ta có: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = 0$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} -\frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = 0$$

Do đó $f'(x) = 0$.

$$\text{Vậy: } f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x > 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \\ -2x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

b) Khi $x > 0$: $f'(x) = -e^{-x}$

Khi $x < 0$: $f'(x) = -1$

Tại $x = 0$: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\Delta x} - 1}{\Delta x} = -1$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{(1 - \Delta x) - 1}{\Delta x} = -1$$

Vậy $f'(0) = -1$.

$$\text{Do đó: } f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{khi } x \leq 0 \\ -e^{-x} & \text{khi } x > 0 \end{cases}$$

Bài 4: Cho hàm số $f(x)$ xác định bởi: $f(x) = \begin{cases} x \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

a) Chứng minh hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) Hàm số f có đạo hàm tại các điểm nào? Tính đạo hàm tại các điểm đó.

Hướng dẫn giải:

a) Ta có hàm số f liên tục trên mọi $x \neq 0$, do đó ta chỉ cần chứng minh hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

Vì $0 \leq \left| x \cos \frac{1}{x^2} \right| \leq |x|$, do đó: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x^2} = 0 = f(0)$. Vậy f

liên tục tại $x = 0 \Rightarrow$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) Để ý rằng tại $\forall x \neq 0$, hàm số có đạo hàm là:

$$f'(x) = \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{2}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Xét tại $x = 0$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \cdot \cos\left(\frac{1}{(\Delta x)^2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{(\Delta x)^2}\right)$

Xét hai dãy: $(\Delta x)_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$ và $(\Delta x')_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}}$

Thì $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{1}{\Delta^2 x}\right) = 1$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{1}{\Delta^2 x'}\right) = 0$

Do đó không tồn tại $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{\Delta x}\right)$

vậy $f(x)$ không có đạo hàm tại $x = 0$.

Bài 5: Cho hàm số f xác định bởi: $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

a) Tính đạo hàm của hàm số f trên $\mathbb{R}$.

b) Chứng minh $f'(x)$ không liên tục tại $x = 0$.

Hướng dẫn giải:

a) Để ý $\forall x \neq 0$ hàm số có đạo hàm $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

Tại $x = 0$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \cdot \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)$.

Vì $0 \leq \left| \Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} \right| \leq |\Delta x|$ nên $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$

Vậy: $f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

b) Xét hai dãy $x_n = \frac{1}{2\pi n}$, $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$ thì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{1}{x_n}\right) = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{1}{y_n}\right) = 0$$

Vậy không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$, do đó hàm số $f'(x)$ không liên tục tại $x = 0$.

Bài 6: Cho hàm số f xác định bởi: $f(x) = \begin{cases} (x+1)e^{-x} & \text{khi } x > 0 \\ x^2 - ax + 1 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$

Tìm a để hàm số có đạo hàm tại $x = 0$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{(\Delta x)^2 - a\Delta x + 1 - 1}{\Delta x} = -a$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{(\Delta x + 1)e^{-\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{-\Delta x} - 1}{\Delta x} + e^{-\Delta x} \right) = -1 + 1 = 0$$

Để hàm số có đạo hàm tại $x = 0$ ta phải có: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\Leftrightarrow -a = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

Bài 7: Cho hàm số f xác định bởi: $f(x) = \begin{cases} \sin \pi^3 |x| & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

Tính đạo hàm một bên của hàm số trên tại $x = 0$. Hàm số có đạo hàm tại $x = 0$ hay không?

Hướng dẫn giải:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \pi^3 \left(\frac{\sin \pi \Delta x}{\pi \Delta x} \right)^3 = \pi^3.$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} (-\pi^3) \left(\frac{\sin(-\pi \Delta x)}{\pi \Delta x} \right) = -\pi^3.$$

Do đó $f'(0^+) = \pi^3$, $f'(0^-) = -\pi^3$.

Vì $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \neq \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow$ không tồn tại giá trị đạo hàm của các hàm số tại $x = 0$.

Bài 8: Cho hàm số f xác định bởi: $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(\cos x)}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

Tính giá trị đạo hàm của hàm số tại $x = 0$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln(\cos x)}{(\Delta x)^2} = \frac{[\ln(1 + \cos \Delta x) - 1]}{(\cos \Delta x - 1)} \cdot \frac{(\cos \Delta x - 1)}{(\Delta x)^2}$$

$$\text{Do đó: } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln[1 + (\cos \Delta x - 1)]}{\cos \Delta x - 1} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{\Delta x}{2}}{4 \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2} = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } f'(0) = -\frac{1}{2}$$

Bài 9: Tính đạo hàm của: $f(x) = |x| - \ln(1 + |x|)$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Khi } x > 0: f(x) = x - \ln(1 + x) \Rightarrow f'(x) = \frac{x}{1+x}$$

$$\text{Khi } x < 0: f(x) = -x - \ln(1 - x) \Rightarrow f'(x) = \frac{x}{1-x}$$

$$\text{Khi } x = 0: f'(0^+) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x - \ln(1 + \Delta x)}{\Delta x} = 1 - \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \Delta x)}{\Delta x} = 1 - 1 = 0$$

$$f'(0^-) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x - \ln(1 - \Delta x)}{\Delta x} = -1 - \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1 - \Delta x)}{\Delta x} = -1 + 1 = 0$$

$$\text{Vậy } f'(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & \text{khi } x > 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \\ \frac{x}{1-x} & \text{khi } x < 0 \end{cases} \text{ hay } f'(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

Bài 10: Tính bằng định nghĩa đạo hàm của hàm số: $y = 2002^x$.

Hướng dẫn giải:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2002^x \frac{(2002^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2002^x \left(\frac{e^{\Delta x \ln 2002} - 1}{\Delta x \ln 2002} \right) \ln 2002 = 2002^x \cdot \ln 2002.$$

Bài 11: Tìm m để đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 3x$ tiếp xúc với đường thẳng: $y = mx - 1$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Điều kiện tiếp xúc là: } \begin{cases} 4x_0^3 - 3x_0 = mx_0 - 1 \\ 12x_0^2 - 3 = m \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ ta được } x = \frac{1}{2} \Rightarrow m = 0$$

Vậy khi $m = 0$ thì đồ thị tiếp xúc với đường thẳng $y = 1$.

Bài 12: Chứng minh đường cong $y = x^2 + 2x + 3$ và đường cong $g = (x^2 + 2x + 3)\sin ax$ tiếp xúc với nhau tại giao điểm của chúng $a \neq 0$.

Hướng dẫn giải:

Gọi $x = x_0$ là hoành độ giao điểm, ta có:

$$x_0^2 + 2x_0 + 3 = (x_0^2 + 2x_0 + 3)\sin ax \Leftrightarrow \sin ax_0 = 1 \Leftrightarrow ax_0 = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (1)$$

$$f(x) = x^2 + 2x + 3 \Rightarrow f'(x_0) = 2x_0 + 2$$

$$g(x) = (x^2 + 2x + 3)\sin ax \Rightarrow g'(x_0) = (2x_0 + 2)\sin ax_0 + a(x_0^2 + 2x_0 + 3)\cos ax_0$$

$$\text{Vì } ax_0 = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Rightarrow \cos(ax_0) = 0, \text{ do đó: } g'(x_0) = 2x_0 + 2 = f'(x_0).$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases} \Rightarrow \text{Hai đường cong tiếp xúc với nhau tại } x = 0$$

Bài 13: Chứng minh rằng đường cong $y = e^{|x|}$ không có đạo hàm tại $x = 0$.

Xác định góc tạo bởi hai tiếp tuyến (ở mỗi phía) của đường cong tại $x = 0$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } f(x) = \begin{cases} e^x & \text{khi } x \geq 0 \\ e^{-x} & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$$

$$f'(0^+) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1, f'(0^-) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{-\Delta x} - 1}{\Delta x} = -1$$

Do: $f'(0^+) \neq f'(0^-)$ nên hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$.

Hệ số góc tiếp tuyến bên trái $x = 0$ là $k = f'(0^-) = -1$

Hệ số góc tiếp tuyến bên phải $x = 0$ là $k' = f'(0^+) = 1$

Vì $k.k' = -1$ nên góc tạo bởi hai tiếp tuyến tại $x = 0$ là góc vuông.

III. Đạo hàm của hàm số hợp – Đạo hàm cấp cao

3.1. Tóm tắt lý thuyết:

Nếu: $u = g(x)$ có đạo hàm u'_x và $y = f(u)$ có đạo hàm y'_u thì hàm số hợp:

$y = f(g(x))$ có đạo hàm theo x là: $y'_x = y'_u \cdot u'_x$

Công thức đạo hàm cấp n :

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$$

3.2. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $\forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh:

a) Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn thì $f'(x)$ là hàm số lẻ.

b) Nếu $f(x)$ là hàm số lẻ thì $f'(x)$ là hàm số chẵn.

Hướng dẫn giải:

a) f là hàm số chẵn $\Leftrightarrow f(-x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$

Đạo hàm hai vế: $-f'(-x) = f'(x) \Leftrightarrow f'(-x) = -f'(x)$ do đó $f'(x)$ là hàm số lẻ.

b) f là hàm số lẻ $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x) \forall x \in \mathbb{R}$

Đạo hàm hai vế: $-f'(-x) = -f'(x) \Leftrightarrow f'(-x) = f'(x) \forall x \in \mathbb{R}$, do đó $f'(x)$ là hàm số chẵn.

Bài 2: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x)$

b) $y = f(e^x) \cdot e^{f(x)}$

Hướng dẫn giải:

a) $y' = (\sin^2 x)' \cdot f'(\sin^2 x) + (\cos^2 x)' \cdot f'(\cos^2 x)$

$$y' = \sin 2x \cdot [f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)]$$

b) $y' = e^x f'(e^x) e^{f(x)} + f'(x) e^{f(x)} \cdot f'(e^x)$

$$y' = e^{f(x)} e^x f'(e^x) + f(e^x) f'(x)$$

Bài 3: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^x$

b) $y = x^{\ln x}$

c) $y = (\sin x)^{\cos x}$

d) $y = e^{x^x}$

Hướng dẫn giải:

a) $y = x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + 1$

$$y' = y(\ln x + 1) \Leftrightarrow y' = x^x (\ln x + 1)$$

b) Ta có: $\ln y = \ln^2 x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{2}{x} \ln x \Rightarrow y' = \frac{2}{x} x^{\ln x} \cdot \ln x$

c) $\ln y = \cos x \cdot \ln(\sin x) \Rightarrow \frac{y'}{y} = -\sin x \cdot \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x}$

$$\text{Do đó } y = (\sin x)^{\cos x} \left[-\sin x \cdot \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right]$$

d) $\ln y = x^x \Rightarrow \frac{y'}{y} = x^x (\ln x + 1)$

$$y' = e^{x^x} \cdot e^x (\ln x + 1)$$

Bài 4: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) \forall x \in \mathbb{R}$ và thoả
 $f(2x) = 4\cos x f(x) - 2x$. Tính $f''(0)$.**Hướng dẫn giải:**Đạo hàm hai vế ta có: $2f'(2x) = -4\sin x f(x) + 4\cos x f'(x) - 2$.Tại $x = 0 \Rightarrow 2f'(0) = 4f'(0) - 2 \Leftrightarrow f'(0) = 1$.**Bài 5:** Cho hàm số: $y = \frac{1}{1-x}$.

Chứng minh: $y^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

Hướng dẫn giải:Ta có: $y' = \frac{1}{(1-x)^2}; y'' = \frac{2}{(1-x)^3}$ công thức đúng khi $n = 1$.Giả sử: $y^{(k)} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ công thức đến bậc k .

Ta có: $y^{(k+1)} = \left(\frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \right)' = (k!(1-x)^{-k-1})'$
 $= k!(-k-1)(1-x)^{-k-2}(1-x)' = \frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+1}}$

Công thức đúng khi $n = k + 1$.

Vậy công thức đúng $\forall n \in \mathbb{N}$

Bài 6: Cho $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 + x - 1}$. Chứng minh:

$$y^{(n)} = (-1)^n n! \left[\frac{2^{n-1}}{(2x-1)^{n+1}} - \frac{2}{(x+1)^{n+1}} \right]$$

Hướng dẫn giải:

Khi $n = 1$ ta có: $y' = \frac{7x^2 - 3x + 2}{(2x^2 + x - 1)^2}$

Và: $y^{(n)} = (-1)^n n! \left[\frac{2^{n-1}}{(2x-1)^{n+1}} - \frac{2}{(x+1)^{n+1}} \right]$

So sánh ta có công thức đúng khi $n = 1$.

Giả sử công thức đúng đến $n = k$ nghĩa là:

$$y^{(k)} = (-1)^k k! \left[\frac{2^{k-1}}{(2x-1)^{k+1}} - \frac{2}{(x+1)^{k+1}} \right]$$

Ta có: $y^{(k+1)} = [(y)^k]' = (-1)^k k! \left[\frac{2^{k-1}}{(2x-1)^{k+1}} - \frac{2}{(x+1)^{k+1}} \right]'$

$$= (-1)^{k+1} \cdot (k+1)! \left[\frac{2^k}{(2x-1)^{k+2}} - \frac{2}{(x+1)^{k+2}} \right] : \text{Công thức đúng khi } n = k + 1.$$

Do đó công thức đúng $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ đpcm.

Bài 7: Cho hàm số: $y = x^2 e^x$. Tính $y^{(n)}$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $y' = (x^2 + 2x)e^x$; $y'' = (x^2 + 4x + 2)e^x$; $y''' = (x^2 + 6x + 6)e^x$

Ta chứng minh: $y^{(n)} = (x^2 + 2nx + n(n-1))e^x$.

Giả sử công thức đúng đến $N = k$ nghĩa là:

$$y^{(k)} = (x^2 + 2kx + k(k-1))e^x$$

Ta có:

$$y^{(k+1)} = \left(\left[x^2 + 2kx + k(k-1) \right] e^x \right)' = (2x + 2k)e^x + (x^2 + 2kx + k(k-1))e^x$$

$$= (x^2 + 2(k+1)x + k(k+1))e^x \text{ Công thức đúng đến } n = k + 1$$

$$\text{Vậy } y^n = (x^2 + 2nx + n(n-1))e^x \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Bài 8:

a) Cho $y = \sqrt{2x - x^2}$. Chứng minh: $x + yy' + y^3 y'' = 0$

b) Cho $y = x^n [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] \quad (x > 0, n \in \mathbb{N})$

Chứng minh: $x^2 y'' + (1 - 2n)xy' + (1 + n^2)y = 0$.

Hướng dẫn giải:

a) Ta có: $y' = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}, y'' = \frac{-1}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$

Do đó: $y \cdot y' = 1 - x; y^3 y'' = -1$

Vậy: $x + yy' + y^3 y'' = 0$.

b) Ta có: $y = \sqrt{2}x^n \cos\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right)$.

$$y' = n\sqrt{2}x^{n-1} \cos\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}x^{n-1} \cdot \sin\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$y'' = (n^2 - n - 1) \cdot \sqrt{2}x^{n-2} \cos\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right) + (1 - 2n)\sqrt{2}x^{n-2} \cdot \sin\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Do đó: $x^2 y'' + (1 - 2n)xy' + (1 + n^2)y = 0$. đpcm.

Bài 9: Cho $f(x) = (x^2 - 2x + 2)\sin(x-1)$. Chứng minh hệ phương trình sau

đây có nghiệm:
$$\begin{cases} f^{(2002)}(x) + f^{(2002)}y = 0 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

Với $f^{(n)}(x)$ là đạo hàm cấp n .

Hướng dẫn giải:

Đặt $a = x - 1; b = y - 1$, ta có

$$f(x) = (a^2 + 1)\sin(a) = g(a).$$

Hệ trở thành:
$$\begin{cases} g^{(2002)}(a) + g^{(2002)}(b) = 0 & (1) \\ (a+1)^2 + (b+1)^2 = 10 & (2) \end{cases}$$

Đề ý rằng $g(x)$ là hàm số lẻ $\Rightarrow g'(x)$ chẵn $\Rightarrow g^{(2002)}(x)$ là hàm số lẻ
Nếu $b = -a$ thì (1) thỏa.

Thay $b = -a$ vào (2) $\Rightarrow (a+1)^2 + (a-1)^2 = 10 \Rightarrow \begin{cases} a = 2, b = -2 \\ a = -2, b = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Hệ có nghiệm $(3, -1), (-1, 3)$.

IV. Bài tập tự luyện về đạo hàm

Bài 1: Chứng minh hàm số $y = \ln\left(\frac{1}{1+x}\right)$ thỏa hệ thức $xy' + 1 = e^y$.

Bài 2: Cho hàm số $y = 2\cos^2(4x-1)$. Tính miền giá trị của $f(x)$.

Bài 3: Chứng minh rằng hàm số $y = \frac{1}{1+x+\ln x}$ thỏa $xy' = y(y\ln x - 1)$.

Bài 4: Cho hàm số: $y = \frac{1}{\sqrt{2x}}, y = \frac{x^2}{\sqrt{2}}$. Viết phương trình tiếp tuyến với các đồ thị tại giao điểm của chúng và tính góc giữa 2 tiếp tuyến trên.

Bài 5: Cho $y = f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x)$ là hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$
Chứng minh đường cong $y=f(x)$ và đường cong $y=f(x)\sin x$ tiếp xúc nhau tại các giao điểm của chúng.

Bài 6: Cho hàm số f xác định bởi:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x^2+1)}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

Xét tính liên tục và đạo hàm của hàm số tại $x = 0$.

Bài 7: Cho hàm số $f(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$. Xét tính liên tục và tồn tại đạo hàm tại $x = 0$.

Bài 8: Cho hàm số f xác định bởi: $f(x) = \begin{cases} xe^{nx} & \text{khi } x > 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

a) Chứng minh hàm số liên tục trên $(0, \infty)$.

b) Xét sự tồn tại đạo hàm tại $x = 0$

Bài 9: Tìm trên đồ thị hàm số: $y = x - \ln x$ các điểm mà tiếp tuyến tại đó song song với Ox.

Bài 10:

a) Tính đạo hàm cấp n của các hàm số: $y_1 = \frac{1}{x+1}, y_2 = \frac{1}{x-1}$

b) Suy ra đạo hàm bậc n của: $y = \frac{2x}{x^2-1}$

Bài 11: Cho hàm số $y = \begin{cases} x & \text{khi } x \leq 1 \\ ax^2 + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$

Tìm a và b để hàm số có đạo hàm tại $x = 1$

Bài 12: cho $f(x)$ xác định bởi: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} & \text{khi } x > 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

Xác định $f'(x)$.

Hướng dẫn giải:

Bài 2: Miền giá trị: $E = [-8, 8]$.

Bài 4: Tọa độ giao điểm $A\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Các tiếp tuyến: $\begin{cases} y = \frac{-1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2} \\ y = \sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

$kk' = -1$. Hai tiếp tuyến vuông góc nhau.

Bài 5: Giao điểm 2 đường cong là nghiệm của: $\sin ax = 1$.

$$J_2' = f'(x) \sin ax + a \cos(ax) f(x)$$

$ax = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Rightarrow y_2' = f'(x) = y_1'(x)$: Tại các giao điểm này các đồ thị tiếp xúc nhau.

Bài 6: $f(0) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \ln(x^2 + 1)}{x^2} = 0 \cdot 1 = 0 = f(0): \text{Hàm số liên tục tại } x = 0.$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta^2 x + 1)}{\Delta^2 x} = 1$$

Vậy: $f'(0) = 1$.

Bài 7: Hàm số liên tục tại $x = 0$. Không tồn tại đạo hàm tại $x = 0$.

Bài 8: b) $f'(0) = 0$.

Bài 9: $A(1,1)$

Bài 10:

$$\text{a) } y_1^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}; y_2^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} \quad \text{b) } y_1^{(n)} = (-1)^n n! \frac{(x+1)^{n+1} + (x-1)^{n+1}}{(x^2 - 1)^{n+1}}$$

$$\text{Bài 11: } a = b = \frac{1}{2}$$

$$\text{Bài 12: } f'(x) = \begin{cases} x \ln & \text{khi } x > 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

B. Trắc nghiệm về giới hạn và đạo hàm

Câu 1: Giá trị của $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$ là:

- A. 0 B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. ∞ .

Câu 2: Giá trị của $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ là:

- A. ∞ B. 1 C. 2 D. $\frac{1}{2}$.

Câu 3: Giá trị của $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi}$ là:

- A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

Câu 4: Giá trị của $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$ là:

- A. 0 B. -1 C. 1 D. 2.

Câu 5: Giá trị của $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x}$ là:

- A. 1 B. $\frac{1}{\ln 2}$ C. $\ln 2$ D. -1.

Câu 6: Dựa vào định nghĩa đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ thì

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{2}}$$
 là:

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$.

Câu 7: Cho $f(x) = 2|x|$. Giá trị đạo hàm của $f(x)$ tại $x = 0$ là:

- A. 0 B. 1 C. 2 D. Không tồn tại.

Câu 8: Cho $f(x) = \sqrt{|x^3|}$ Giá trị $f'(0)$ là:

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. 0 D. Không tồn tại.

Câu 9: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{2}{3} \cos^3 x$ là

- A. $y' = 2 \cos^2 x$ B. $y' = 2 \cos^2 x \sin x$
C. $y' = 2 \sin^2 x$ D. $y' = -2 \cos^2 x \sin x$.

Câu 10: $y = x^x$ có đạo hàm là:

A. $y' = (x-1)x^{x-1}$

B. $y' = x^{x-1}$

C. $y' = x^x(\ln x - 1)$

D. $y' = x^x(\ln x + 1)$.

Câu 11: Đạo hàm của $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ là:

A. $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

B. $y' = \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

C. $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

D. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}}$.

Câu 12: Cho $f(x) = \sqrt{3} \cos x + \sin x - 2x$. Nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ là:

A. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$

B. $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$

C. $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$

D. $x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi$.

Câu 13: Cho $y = (x - \pi)^3(\sin x + \cos x)$. Giá trị $y'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ là:

A. $\frac{27}{16}\pi^2$

B. $-\frac{27}{16}\pi^2$

C. $-\frac{16}{27}\pi^2$

D. $\frac{27}{16}\sqrt{2}\pi^2$.

Câu 14: Cho hàm số $y = e^x \cos x$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng:

A. $y^{(4)} = 4y$

B. $y^{(4)} = \frac{1}{4}y$

C. $y^{(4)} = -4y$

D. $y^{(4)} = -\frac{1}{4}y$.

Câu 15: Nếu $f(x)$ có đạo hàm bậc n thì $f(ax + b)$ có đạo hàm cấp n là:

A. $a^n f^{(n)}(ax + b)$

B. $f^{(n)}(ax + b)$

C. $\frac{1}{a^n} f^{(n)}(ax + b)$

D. $a f^{(n)}(ax + b)$.

Câu 16: Cho hàm số $y = e^{2x} \cdot \cos 4x$. Giá trị của $y''(0)$ là:

A. 4

B. 12

C. -12

D. $\frac{4}{3}$.

Câu 17: Cho $f(x) = (ax + b)e^{3x}$. Để $f'(x) = (3x + 4)e^{3x}$ thì giá trị của a và b là:

A. $a = b = 1$ B. $a = b = -1$ C. $a = 3, b = \frac{1}{3}$ D. $a = \frac{1}{3}, b = 3$.

Câu 18: Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Để có: $f(x) + (x-1)f'(x) = 3x^2 \forall x \in \mathbb{R}$. Thì giá trị của a, b, c là:

A. $a = b = c = 1$ B. $a = b = c = -1$
C. $a = 1, b = c = -1$ D. $a = -1, b = c = 1$.

Câu 19: Cho $f(x) = 2x^2 + 16\cos x - \cos 2x$. Giá trị $f''(\pi)$ là:

A. 12 B. 24 C. -24 D. -12.

Câu 20: Cho $f(x) = A\sin(ax+b) + B\cos(ax+b)$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng

A. $f'''(x) = af(x)$ B. $f'''(x) = a^2f(x)$
C. $f'''(x) = -a^2f(x)$ D. $f'''(x) = -af(x)$.

Câu 21: Cho hàm số $y = \cos^2 x$. Giá trị của $y'''(\frac{\pi}{4})$ là:

A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 4 D. $\frac{1}{4}$.

Câu 22: Cho hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng :

A. $y^3 \cdot y'' = 1$ B. $y^3 \cdot y'' = -1$ C. $y^3 \cdot y' + 1 = 0$ D. $y^2 \cdot y' = x$.

Câu 23: Cho $y = e^{\cos x}$. Đẳng thức nào dưới đây là đúng :

A. $y'\sin x + y\cos x + y'' = 0$ B. $y\sin x + y'\cos x + y'' = 0$
C. $y'\sin x - y\cos x + y'' = 0$ D. $y'(\sin x + \cos x) = y''$.

Câu 24: Hàm số: $y = \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$ có đạo hàm là hàm số nào sau đây:

A. $y' = \frac{1}{2\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}}$ B. $y' = \frac{f(x) + g(x)}{\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}}$
C. $y' = \frac{f(x)f'(x) + g(x)g'(x)}{\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}}$ D. $y' = \frac{f'(x) + g'(x)}{2\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}}$.

Câu 25: Cho $y = 2e^x \sin x$. Giá trị của biểu thức: $2y - 2y' + y''$ là:

- A. 0 B. -1 C. 1 D. $\frac{1}{2}$.

Câu 26: Cho $y = \sin x$. Đạo hàm cấp n của y là:

- A. $y^{(n)} = \cos(x + n\pi)$ B. $y^{(n)} = \sin(x + n\pi)$
C. $y^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$ D. $y^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$.

Câu 27: Đạo hàm cấp n của hàm số $y = \frac{1}{1-x}$ là:

- A. $y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1-x)^n}$ B. $y^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$
C. $y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1-x)^{n+1}}$ D. $y^{(n)} = \frac{(n-1)!}{(1-x)^{n-1}}$.

Câu 28: Cho $f(x) = (x-1)^2$, với $g(x) = f(\sin x)$ thì $g'(x)$ là:

- A. $g'(x) = \sin 2x - 2\cos x$ B. $g'(x) = 2(\cos x - 1)$
C. $g'(x) = 2(\sin x - 1)$ D. $g'(x) = -\sin 2x - 2\cos x$.

Câu 29: Cho hàm số: $y = x^2 e^{-x}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng.

- A. $y' + y'' = y$ B. $2y' + y'' + y = e^{-x}$
C. $2y' + y'' + y = 2e^{-x}$ D. $y'' + 2y' - y = e^{-x}$

Câu 30: Cho hàm số: $y = e^{2x} \sin x$. Để có: $y'' = 4y' + my$ $\forall x \in \mathbb{R}$ thì giá trị của m là:

- A. -4 B. 4 C. 5 D. -5.

Câu 31: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ (c). Để đường thẳng $y = kx$ tiếp xúc với (c) thì giá trị của k là:

- A. -3 B. $-\frac{15}{4}$ C. -3 hay $\frac{15}{4}$ D. $\frac{15}{4}$.

Câu 32: Cho hàm số: $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ (C). Đường thẳng nào dưới đây là tiếp tuyến với (C) song song với đường $y = 3x$

$$A. y = 3x + \frac{7}{3}$$

$$B. y = 3x - \frac{29}{3}$$

$$C. y = 3x + \frac{29}{3}$$

$$D. y = 3x - \frac{7}{3}$$

Câu 33: Cho hàm số: $y = \frac{-3x^2 + mx + 4}{4x + m}$. Để tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = 0$ vuông góc với trục Oy thì giá trị của m là:

$$A. m = \pm 4$$

$$B. m = 0$$

$$C. m = \pm 1$$

$$D. m = \frac{1}{2}$$

Câu 34: Cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 4$. (c). Tiếp tuyến tại M ở trên đồ thị (c) có hệ số góc lớn nhất bằng:

$$A. k = 3$$

$$B. k = -1$$

$$C. k = 2$$

$$D. k = \frac{1}{3}$$

Câu 35: Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 3x + 1$. Đường thẳng nào dưới đây là tiếp tuyến với đồ thị tại gốc O :

$$A. y = 3x - 1$$

$$B. y = -3x$$

$$C. y = -3x + 1$$

$$D. y = 3x + 1$$

C. Hướng dẫn giải Trắc Nghiệm

Câu 1 : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$. Chọn câu C.

Câu 2: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}$. Chọn câu D.

Câu 3: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Chọn câu B.

Câu 4: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^x - 1}{x} - \frac{e^{-x} - 1}{-x} \right] \cdot \frac{x}{\ln(1+x)}$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x} \right) \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}} = \frac{1+1}{1} = 2. \text{ Chọn câu D.}$$

Câu 5: Đặt $t = 2^x - 1 \Leftrightarrow t + 1 = 2^x \Leftrightarrow \ln(t + 1) = x \ln 2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \ln 2}{\ln(1+t)} = \ln 2. \text{ Chọn câu C.}$$

Câu 6: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = f'\left(\frac{\pi}{2}\right).$

$$f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow f'(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Chọn câu C.}$$

Câu 7: $f(x) = 2|x| = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \geq 0 \\ -2x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = 2 \Leftrightarrow f'(0^+) = 2.$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = -2 \Leftrightarrow f'(0^-) = -2.$$

Không tồn tại giá trị đạo hàm tại $x = 0$. Chọn câu D.

Câu 8: $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|x^3|}}{x}$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{x}}{x} = 0; f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x\sqrt{-x}}{x} = 0.$$

Vậy $f'(0) = 0$. Chọn câu C.

Câu 9: $y' = \frac{2}{3} \cdot 3\cos^2 x (\cos x)' = -2\cos^2 x \sin x$. Chọn câu D.

Câu 10: $\ln y = x \ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = 1 + \ln x \Rightarrow y' = (1 + \ln x)x^x$. Chọn câu D

Câu 11: $y' = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})'}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$. Chọn câu C.

Câu 12: $f'(x) = -\sqrt{3} \sin x + \cos x - 2$.

Thay các giá trị vào $f'(x)$ thì được $f'\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 0$.

$x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$ là nghiệm. Chọn câu B.

Câu 13: $y' = 3(x - \pi)^2 (\sin x + \cos x) + (\pi - 3)^3 (\cos x - \sin x)$.

$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{27}{16} \sqrt{2} \pi^2$. Chọn câu D.

Câu 14: $y' = e^x (\cos x - \sin x); y'' = -2e^x \sin x$.

$y''' = -2e^x (\sin x + \cos x); y^{(4)} = -4e^x \cos x = -4y$. Chọn câu C.

Câu 15: Đề ý: $[f(ax + b)]' = af'(ax + b)$.

Quy nạp ta có: $[f(ax + b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax + b)$. Chọn câu A.

Câu 16: $y'' = 4e^{2x} (-3\cos 4x - 4\sin 4x)$.

$y''(0) = -12$. Chọn câu C.

Câu 17: $f'(x) = e^{3x} [3ax + a + 3b] = (3x + 4)e^{3x} \Rightarrow a = b = 1$. Chọn câu A.

Câu 18:

$f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f(x) + (x - 1)f'(x) = 3ax^2 + 2(b - a)x + c - b = 3x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a = 3 \\ b - a = 0 \\ c - b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = c = 1$$
. Chọn câu A.

Câu 19: $f''(x) = 4 - 16\cos x + 4\cos 2x \Rightarrow f''(\pi) = 24$. Chọn câu B.

Câu 20: $f''(x) = -a^2 [A \sin(ax + b) + B \cos(ax + b)] = -a^2 f(x)$. Chọn câu C.

Câu 21: $y' = -2\cos x \cdot \sin x = -\sin 2x; y'' = -2\cos 2x$;

$y''' = 4\sin 2x \Rightarrow y'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4$. Chọn câu C.

Câu 22: $y' = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}, y'' = \frac{-1}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}}$

$\Rightarrow y^3 y'' + 1 = 0$. Chọn câu C.

Câu 23: $y' = -e^{\cos x} \sin x; y'' = e^{\cos x} \cdot \sin^2 x - e^{\cos x} \cdot \cos x$

Kiểm tra chọn đẳng thức A. Chọn câu A.

Câu 24: $y' = \frac{[f^2(x) + g^2(x)]^2}{2\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}} = \frac{2[f(x)f'(x) + g(x)g'(x)]}{2\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}}$. Chọn câu C.

Câu 25: $y' = 2[e^x \sin x + e^x \cos x] = 2e(\sin x + \cos x).$

$$y'' = 2[e^x \sin x + \cos x + e^x(\cos x - \sin x)] = 4e^x \cos x.$$

$2y - 2y' + y'' = 0$. Chọn câu A.

Câu 26: $y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$$y'' = -\sin x = \sin(x + \pi)$$

Quy nạp được $y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$. Chọn câu D.

Câu 27: $y' = \frac{1}{(1-x)^2}, y'' = \frac{2}{(1-x)^3}, y''' = \frac{6}{(1-x)^4}.$

Quy nạp: $y^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$. Chọn câu B.

Câu 28: $g(x) = (\sin x - 1)^2 \Rightarrow g'(x) = 2(\sin x - 1)\cos x = \sin 2x - 2\cos x.$

Chọn câu A.

Câu 29: $y' = (-x^2 + 2x)e^{-x}; y'' = (x^2 + 4x + 2)e^{-x}$

Kiểm tra thì: $2y' + y'' + y = 2e^{-x}$. Chọn câu C.

Câu 30: $y' = e^{2x}(2\sin x + \cos x); y'' = e^{2x}(3\sin x + 4\cos x)$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad y'' = 4y' + my \Leftrightarrow e^{2x}(5+m)\sin x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow m+5=0$$

$\Leftrightarrow m = -5$. Chọn câu D.

Câu 31: Điều kiện tiếp xúc $\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 1 = kx \\ 3x^2 + 6x = k \end{cases} \Rightarrow k = -3 \text{ hay } k = \frac{15}{4}.$

Chọn câu C.

Câu 32: $f'(x) = x^2 - 4x + 3$

$$f'(x) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = 4 \Rightarrow y = \frac{7}{3} \end{cases} \text{ . Chọn câu B.}$$

Tại $\left(4, \frac{7}{3}\right)$. Tiếp tuyến là: $y = 3x - \frac{29}{3}$.

Câu 33: $f'(0) = \frac{m^2 - 16}{m^2}$. Tiếp tuyến vuông góc với trục Oy có hệ số góc

$$k = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0 \Leftrightarrow m = \pm 4 \text{ . Chọn câu A.}$$

Câu 34: $k = f'(x_0) = -3x_0^2 - 6x_0$

$$k_{\max} \Leftrightarrow x_0 = -1$$

$$k_{\max} = f'(-1) = 3 \text{ . Chọn câu A.}$$

Câu 35: Áp dụng công thức tiếp tuyến tại gốc O

$$y - 0 = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = -3x + 1 \text{ . Chọn câu C.}$$

§2 Vấn đề 2: Ứng dụng đạo hàm vào hàm số

A. Các dạng cơ bản:

I. Định lí Lagrange (La - Grăng)

1.1. Tóm tắt lý thuyết:

Định lí: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và có đạo hàm trong (a, b) thì tồn tại ít nhất 1 số $c \in (a, b)$ để cho $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Ý nghĩa: Nếu $y = f(x)$ thoả điều kiện định lí Lagrange thì trên cung AB của đồ thị tồn tại ít nhất 1 điểm C mà tiếp tuyến tại đó song song với đường thẳng qua AB

PP. Áp dụng tính chất: Nếu $f(x)$ thoả điều kiện định lí Lagrange trên $[a, b]$ và nếu $f(a) = f(b)$ thì phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm $\in (a, b)$.

1.2. Các áp dụng cơ bản:

1) Tìm số c trong định lí Lagrange trên $[a, b]$.

PP. Tính $f'(x)$, giải phương trình $f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Chọn nghiệm $c \in (a, b)$.

2) Chứng minh bất đẳng thức bằng định lí Lagrange

PP. Đối với các bất đẳng thức có chứa dạng: $f(b) - f(a)$ thì có thể xét $f(x)$ trên $[a, b]$, dựa vào đẳng thức $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ với $c \in (a, b)$ để chứng minh bất đẳng thức.

3) Chứng minh phương trình có nghiệm trên $[a, b]$.

1.3. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Tìm số c trong định lí Lagrange các hàm số sau:

a) $y = x - x^3$ trên $[-2, 1]$

b) $y = \ln x$ trên $[1, e]$

c) $y = \frac{x-1}{x+1}$ trên $[0, 1]$

d) $y = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } -1 \leq x \leq 1 \\ 2x & \text{khi } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$
trên $[-1, 3]$

Hướng dẫn giải:

a) $f'(x) = 1 - 3x^2 \Rightarrow f'(c) = 1 - 3c^2$.

Hàm số thỏa điều kiện của định lí Lagrange nên

$$\exists c \in (-2, 1), 1 - 3c^2 = \frac{f(1) - f(-2)}{3} = -2 \Leftrightarrow c = \pm 1. \text{ Chọn } c = -1.$$

b) $f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(c) = \frac{1}{c}$.

Áp dụng định lí Lagrange, ta có: $\frac{1}{c} = \frac{1}{1 - e} \Rightarrow c = 1 - e$.

c) $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(c) = \frac{2}{(c+1)^2}$. Áp dụng định lí Lagrange ta có

$$\frac{2}{(c+1)^2} = 1 \Leftrightarrow c = -1 \pm \sqrt{2}. \text{ Chọn } c = \sqrt{2} - 1.$$

d) Ta có: $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } -1 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{khi } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$

Nếu $c \in (-1, 1): f'(c) = 2c = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$.

Nếu $c \in (1, 3): f'(c) = 2: \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = 1$ vô nghiệm.

Do đó: $c = \frac{1}{2}$.

Bài 2: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \quad \forall x > 0$.

c) $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$ với $0 < b < a \in \mathbb{R}$

d) $p \cdot y^{p-1}(x-y) \leq x^p - y^p \leq p \cdot x^{p-1}(x-y)$ với $1 < y < x \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{N}$.

Hướng dẫn giải:

a) Xét $f(t) = \sin t$ trên $[x, y]$ với $0 < x < y \in \mathbb{R}$.

Theo định lý Lagrange: $\exists c \in (x, y)$ sao cho:

$$\cos c = \frac{\sin y - \sin x}{y - x} \Rightarrow |\sin y - \sin x| = |y - x| \cdot |\cos c|$$

Vì $|\cos c| \leq 1 \Rightarrow |\sin y - \sin x| \leq |y - x|$.

b) Xét $f(t) = \ln t$ trên $[1, 1+x]$ ($x > 0$).

Theo Lagrange: $\exists c \in (1, 1+x), \frac{1}{c} = \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} \Leftrightarrow \ln(1+x) = \frac{x}{c}$.

Vì $1 < c < 1+x \Rightarrow \frac{1}{1+x} < \frac{1}{c} < 1 \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} < \frac{x}{c} < x$

$\Leftrightarrow \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \Rightarrow \text{đpcm.}$

c) Xét $f(x) = \ln x$ trên $[b, a]$, theo định lý Lagrange ta có:

$\exists c \in (b, a), \frac{1}{c} = \frac{\ln a - \ln b}{a - b}$ với $c \in (b, a)$.

$$\Leftrightarrow \frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

d) Xét $f(t) = t^p$ trên $[y, x]$, ta có: $f'(c) = p.c^{p-1}$.

$$\text{theo định lí Lagrange: } \exists c \in (y, x), pc^{p-1} = \frac{x^p - y^p}{x - y}$$

$$\Leftrightarrow x^p - y^p = p(x - y)c^{p-1}.$$

$$\text{Vì: } 1 < y < c < x \Rightarrow y^{p-1} < c^{p-1} < x^{p-1}$$

$$\Rightarrow p(x - y)p^{p-1} < x^p - y^p < p(x - y)x^{p-1} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài 3: Chứng minh rằng: $\forall a \geq 1$ ta có: $\ln(a^2 + 2a + 2) < 1 + \ln(a^2 + 1)$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Bất đẳng thức tương đương: } \ln[(a+1)^2 + 1] - \ln(a^2 + 1) < 1.$$

Xét $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ trên $[a, a+1]$, theo định lí Lagrange thì

$$\exists c \in (a, a+1) \text{ mà: } f'(c) = \frac{f(a+1) - f(a)}{1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2c}{c^2 + 1} = \ln[(a+1)^2 + 1] - \ln(a^2 + 1).$$

$$\text{Vì } 1 \leq a < c < a+1 \Rightarrow \frac{2c}{c^2 + 1} < 1 \Rightarrow \ln[(a+1)^2 + 1] - \ln(a^2 + 1) < 1 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài 4: Cho $a < b < c \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a, c]$ có đạo hàm đồng biến trên (a, c) . Chứng minh: $(c-b)f(a) + (b-a)f(c) > (c-a)f(b)$.

Hướng dẫn giải:

Áp dụng định lí Lagrange trên $[a, b]$ ta có: $\exists u \in (a, b)$ để cho

$$f'(u) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Áp dụng định lí Lagrange trên $[b, c]$ ta có: $\exists v \in (b, c)$ để cho

$$f'(v) = \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$

Vì $a < u < v < c$ nên: $f'(u) < f'(v)$ (vì $f'(x)$ đồng biến)

$$\text{Do đó: } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < \frac{f(c) - f(b)}{c - b} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài 5: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trong (a,b) . Chứng minh rằng nếu x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ và $a < x_1 < x_2 < b$ thì phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm $c \in (x_1, x_2)$.

Hướng dẫn giải:

Áp dụng định lý Lagrange trên $[x_1, x_2] \subset (a, b)$. Tồn tại ít nhất 1 giá trị

$$c \in (x_1, x_2) \text{ sao cho: } f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \text{ (vì } f(x_1) = f(x_2) = 0)$$

Do đó c là nghiệm của $f'(x) = 0 \Rightarrow \text{đpcm.}$

Bài 6:

a) Cho $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+4)$. Chứng minh phương trình $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

b) Cho $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ thỏa

$$\frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} + \dots + \frac{a_1}{2} + a_0 = 0.$$

Chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(0,1)$.

Hướng dẫn giải:

a) Áp dụng định lý Lagrange trên $[-4, -2]$ ta có: $\exists c \in (-4, -2)$ sao cho:

$$f'(c) = \frac{f(-2) - f(-4)}{2} = 0, \text{ do đó: } f'(x) = 0 \text{ có ít nhất 1 nghiệm thuộc}$$

$(-4, -2)$. Thực hiện tương tự trên các đoạn $[-2, -1], [-1, 0]$ ta cũng có phương trình $f'(x) = 0$ cũng có ít nhất 1 nghiệm trên mỗi khoảng $(-2, -1), (-1, 0)$. Vậy: $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

b) Xét $f(x) = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \dots + \frac{a_1}{2} x + a_0 x$.

Ta có: $f(0) = f(1) = 0$ (giả thiết).

Theo định lý Lagrange ta có: $\exists c \in (0, 1)$ để cho :

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1} = 0 \Rightarrow c \text{ là nghiệm của } f'(x) = 0$$

$\Leftrightarrow c$ là nghiệm của: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \Rightarrow \text{đpcm.}$

Bài 7: Chứng minh trong khoảng giữa 2 nghiệm của phương trình: $e^x \cos x = 1$ có ít nhất 1 nghiệm của phương trình $e^x \sin x = 1$.

Hướng dẫn giải:

Xét $f(x) = e^x \cdot \cos x - 1$ ta có: $f(0) = 0 \Rightarrow x = 0$ là nghiệm.

$f(\frac{\pi}{2}) \cdot f(2\pi) < 0 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc

$(\frac{\pi}{2}, 2\pi)$, do đó phương trình $e^x \cdot \cos x = 1$ có ít nhất 2 nghiệm. Gọi $x_1 < x_2$

là 2 nghiệm đó.

Xét $g(x) = \cos x \cdot e^{-x}$ trên $[x_1, x_2]$, ta có: $g(x_1) = g(x_2) = 0$. $g'(x) = e^{-x} - \sin x$. Theo định lí Lagrange tồn tại $c \in (x_1, x_2)$ để cho:

$$g'(c) = \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$$

$\Leftrightarrow c$ là nghiệm của $g'(x) = 0$.

Mà $g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = \sin x \Leftrightarrow e^x \sin x = 1$.

Vậy phương trình: $e^x \sin x = 1$ có ít nhất 1 nghiệm $\in (x_1, x_2)$

Bài 8: Cho hàm số f liên tục trên $[0, 1]$ có đạo hàm trên $(0, 1)$ và

$$f(x) \neq -1 \quad \forall x \in [0, 1], \text{ đặt } F(x) = \frac{f'(x)}{1 + f(x)}.$$

a) Tính $F'(x)$ trên $[0, 1]$.

b) Giả sử thêm rằng $f(0) = 0; f(1) = 1$. Hãy chứng minh rằng tồn tại số

$$c \in (0, 1) \text{ sao cho } f'(c) = \frac{1}{2} [1 + f(0)]^2.$$

Hướng dẫn giải:

a) Vì $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$ có đạo hàm trong $(0, 1)$ nên: $1 + f(x)$ cũng có

$$\text{đạo hàm trên } (0, 1). \text{ Do đó: } F'(x) = \frac{f'(x)[1 + f(x)] - f'(x) \cdot f(x)}{[1 + f(x)]^2}$$

$$\Leftrightarrow F'(x) = \frac{f'(x)}{[1 + f(x)]^2} \quad \forall x \in [0, 1].$$

b) Ta có: $F(0) = 0, F(1) = \frac{1}{2}$, $F(x)$ thỏa điều kiện của định lý Lagrange nên

$$\text{tồn tại } c \in (0,1) \text{ để cho: } F'(c) = \frac{F(1) - F(0)}{1} \Leftrightarrow \frac{f'(c)}{[1 + f(c)]^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow f'(c) = \frac{1}{2}[1 + f(c)]^2 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài 9: Cho $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$ thỏa $f(0) = 0, f(1) = 1$.

Chứng minh tồn tại $a, b \in (0,1)$ sao cho: $f'(a).f'(b) = 1$.

Hướng dẫn giải:

Xét $g(x) = f(x) + x - 1$ là hàm số liên tục trên $[0,1]$ có $g(0) = -1$ và $g(1) = 1$ nên tồn tại $\alpha \in (0,1)$ để $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = 1 - \alpha$.

Áp dụng định lý Lagrange đối với hàm số f trên $[0,\alpha]$ rồi trên $[\alpha,1]$

Ta có: Tồn tại $a \in (0,\alpha)$ và $b \in (\alpha,1)$, để cho:

$$f'(a) = \frac{f(\alpha) - f(0)}{\alpha - 0} = \frac{1 - \alpha}{\alpha}$$

$$f'(b) = \frac{f(1) - f(\alpha)}{1 - \alpha} = \frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

Do đó: $f'(a).f'(b) = 1 \Rightarrow \text{đpcm.}$

Bài 10: Chứng minh rằng: Nếu $f(x)$ có đạo hàm trên $[a,b]$ mà $f'(x) = 0$ chỉ có 1 nghiệm trên $[a,b]$ thì $f(x) = 0$ không thể có quá 2 nghiệm trên $[a,b]$.

Hướng dẫn giải:

Giả sử $f(x) = 0$ có nhiều hơn 2 nghiệm trên $[a,b]$.

Coi $x_1 < x_2 < x_3$ là 3 nghiệm của $f(x) = 0$. Theo định lý Lagrange thì

$\exists c_1 \in (x_1, x_2)$ và $c_2 \in (x_2, x_3)$ để cho:

$$0 = f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c_1).$$

$$0 = f(x_3) - f(x_2) = (x_3 - x_2)f'(c_2).$$

Do đó: $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$ nên c_1, c_2 là nghiệm của $f'(x) = 0$, vô lý. Do

đó: $f(x) = 0$ không thể có quá 2 nghiệm.

1.4. Bài tập Tự Luyện:

Bài 1: Cho hàm số $y = \alpha x^2 + \beta x + c$. Chứng minh rằng trị số c trong định lí

Lagrange trên $[a, b]$ là $c = \frac{a+b}{2}$

Bài 2: Cho $m > 0$ và $\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0$.

Chứng minh phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm trong $(0, 1)$.

Bài 3: Cho $a < b < c \in \mathbb{R}$. Chứng minh:

$$3a < a+b+c - \sqrt{a^2+b^2+c^2 - (ab+bc+ca)} < a+b+c + \sqrt{a^2+b^2+c^2 - (ab+bc+ca)} < 3c.$$

Bài 4: Chứng minh: $\frac{b-a}{\cos^2 a} < \tan b < \tan a < \frac{b-a}{\cos^2 b}$ với $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$.

Bài 5: Chứng minh: $\sqrt{x+1} + \frac{1}{2(x+1)} > \frac{3}{2} \quad \forall x > 0$.

Bài 6: Chứng minh rằng:

Nếu: Phương trình: $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x = 0$ có 1 nghiệm: $x_0 > 0$ thì phương trình: $n.a_0 x^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \dots + a_{n-1} = 0$ có 1 nghiệm dương nhỏ hơn x_0 .

Bài 7: Chứng minh phương trình: $f(x) = x^n + px + q = 0$ Không thể có quá 2 nghiệm khi n chẵn và không thể có quá 3 nghiệm khi n lẻ.

Bài 8: Tìm a để bất đẳng thức: $x - ax^2 \leq \ln(1+x)$ luôn đúng $\forall x \geq 0$.

Bài 9: Cho $f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$. Chứng minh: $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Bài 10: Giải phương trình: $2001^x + 2003^x = 2.2002^x$.

1.5. Hướng Dẫn – Đáp Số:

Bài 1: Đề ý trên (a, b) chỉ tồn tại $c \in (a, b)$ thoả định lí Lagrange:

$$f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = \alpha(a+b) + \beta$$

$$f(b) - f(a) = \alpha(b^2 - a^2) + \beta(b - a)$$

Do đó: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \Rightarrow c = \frac{a+b}{2}$.

Bài 2: Xét $f(x) = \frac{a}{m+2}x^{m+2} + \frac{b}{m+1}x^{m+1} + \frac{c}{m}x^m$ trên $[0,1]$.

Áp dụng định lí Lagrange: $\exists \alpha \in (0,1)$ để cho:

$$f'(\alpha) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = 0 \Leftrightarrow \alpha^{m+1} [a\alpha^2 + b\alpha + c] = 0$$

$\Rightarrow \alpha$ là nghiệm $\in (0,1)$ của $ax^2 + bx + c = 0$. đpcm.

Bài 3:

Xét $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$.

Theo định lí Lagrange thì tồn tại x_1, x_2 thỏa: $a < x_1 < b < x_2 < c$ sao cho:

$$f'(x_1) = f'(x_2) = 0.$$

Mà $f'(x) = 3x^2 - 2(a+b+c)x + ab+bc+ca$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a+b+c + \sqrt{a^2+b^2+c^2 - (ab+bc+ca)}}{3} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài 4: Xét $f(x) = \tan x$ trên $[a,b]$

$$\exists c \in (a,b), \tan b - \tan a = (b-a) \frac{1}{\cos^2 c}.$$

$$\text{Đề ý: } 0 < a < b < \frac{\pi}{2}: \frac{1}{\cos^2 a} < \frac{1}{\cos^2 c} < \frac{1}{\cos^2 b} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài 5: Xét $f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{3}{2}$ trên $(0, \infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2(x+1)^2}.$$

Dùng định lí Lagrange trên $[0,x]$:

$$\exists c \in (0,x), f'(c) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{c+1}} - \frac{1}{2(c+1)^2} = \frac{f(x)}{x}$$

$$x > 0 \Rightarrow 1 < c+1 < (c+1)^2 \Rightarrow 1 < \sqrt{c+1} < c+1 < (c+1)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{c+1}} > \frac{1}{2(c+1)^2} \Rightarrow f'(c) > 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{x} > 0$$

$$\Rightarrow f(x) > 0, \forall x > 0 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài 6: Áp dụng định lí Lagrange trên $[0, x_0]$ đối với hàm số:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x.$$

Bài 7: Đề ý rằng: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow n \cdot x^{n-1} + p = 0$ có 1 nghiệm khi n chẵn, có 2 nghiệm khi n lẻ, Áp dụng kết quả bài số 10.

Bài 8: Xét $f(x) = \ln(1+x) + ax^2 - x$ với $x \geq 0$.

Ta có: $f(0) = 0$ và $f'(x) = \frac{x(2ax+2a-1)}{1+x}$.

Áp dụng định lí Lagrange trên $[0, x]$: $\exists c \in (0, x), f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{c(2ac + 2a - 1)}{1 + c}.$$

Đề ý: $f(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0 \Leftrightarrow 2ac + 2a - 1 \geq 0 \quad (c > 0)$

$$\Leftrightarrow 2ac \geq 1 - 2a \Leftrightarrow \begin{cases} c \geq \frac{1-2a}{2a} & \text{khi } a > 0 \\ c \leq \frac{1-2a}{2a} & \text{khi } a < 0 \end{cases}$$

Do đó: $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow c \geq \frac{1-2a}{2a}$.

Cho $x \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow c \rightarrow 0^+$ thì $\frac{1-2a}{2a} \leq 0 \Leftrightarrow a \geq \frac{1}{2}$.

Bài 9: Xem bài 6.

Bài 10: Phương trình tương đương: $2003^x - 2002^x = 2002^x - 2001^x$ (*)

Giả sử α là 1 nghiệm của (*)

Xét $f(y) = (y+1)^\alpha - y^\alpha$ thì (*) $\Leftrightarrow f(2002) = f(2001)$.

Theo định lí Lagrange thì tồn tại $c \in (2001, 2002)$ để cho

$$f'(c) = 0 \Leftrightarrow \alpha \left[(c+1)^{\alpha-1} - c^{\alpha-1} \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

Do đó: $x = 0$ v $x = 1$ là nghiệm (thử lại đúng).

II. Tính đơn điệu của hàm số

2.1. Tóm tắt lý thuyết:

Định nghĩa:

Hàm số $y = f(x)$ tăng (đồng biến) trong (a,b) nếu với mọi $x_1, x_2 \in (a,b)$ mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$.

Hàm số $y = f(x)$ giảm (nghịch biến) trong (a,b) nếu với mọi $x_1, x_2 \in (a,b)$ mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$.

Định lý: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trong (a,b) .

Nếu: $f'(x) \geq 0$ (hoặc: $f'(x) \leq 0$) và đẳng thức chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên (a,b) thì hàm số đồng biến (hoặc nghịch biến) trên (a,b) .

2.2. Các áp dụng cơ bản:

1. Khảo sát tính đơn điệu của hàm số – Tìm điều kiện để hàm số tăng, giảm trên miền D

PP – Xét dấu $f'(x)$ rồi áp dụng định lý.

– Áp dụng tam thức bậc 2 không đổi dấu trên miền D.

2. Chứng minh bất đẳng thức bằng tính đơn điệu.

PP – Đối với các bất đẳng thức dạng $f(x) \geq, \leq g(x) \quad \forall x \in D$ thì có thể xét tính đơn điệu $h(x) = f(x) - g(x)$ trên D

Nếu: $h'(x) \geq 0 \quad \forall x \in D$ và $h(x_0) = 0$ thì:

$$x \geq x_0 \Rightarrow h(x) \geq h(x_0) = 0 \Rightarrow f(x) \geq g(x) \quad \forall x \geq x_0.$$

$h'(x) \leq 0 \quad \forall x \in D$ và $h(x_0) = 0$ thì :

$$x \leq x_0 \Rightarrow h(x) \leq h(x_0) = 0 \Rightarrow f(x) \leq g(x) \quad \forall x \leq x_0$$

3. Áp dụng tính đơn điệu vào phương trình – Bất phương trình – Hệ phương trình

PP. Áp dụng các tính chất:

+ Nếu: $f(x)$ là hàm số luôn luôn tăng (hoặc giảm) thì

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y.$$

+ Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hàm số đơn điệu ngược chiều thì phương trình $f(x) = g(x)$ có tối đa 1 nghiệm.

2.3. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Khảo sát tính đơn điệu của các hàm số sau:

a) $f(x) = 2x^2 - \ln x$

b) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 7$

c) $f(x) = \frac{x^3 + 3x + 3}{x + 1}$

d) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

e) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$

f) $f(x) = \sin x + \cos x$ trên $[0, 2\pi]$.

Hướng dẫn giải:

a) $D_f = (0, \infty)$.

$f'(x) = \frac{4x^2 - 1}{x}$: Hàm số tăng trên $(\frac{1}{2}, \infty)$ giảm trên $(0, \frac{1}{2})$.

b) $f'(x) = 6x^2 - 18x - 24$: Hàm số tăng trên $(-\infty, -1) \cup (4, \infty)$ và giảm trên $(-1, 4)$.

c) $f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$ Hàm số tăng trên $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$ và giảm trên $(-2, 0)$.

d) $f'(x) = e^{-x}(2x - x^2)$: Hàm số tăng trên $(0, 2)$ và giảm trên $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$.

e) $f'(x) = \frac{\pi}{x^2} \sin \frac{\pi}{x}$.

Vì: $\sin \frac{\pi}{x} > 0 \Leftrightarrow 2k\pi < \frac{\pi}{x} < (2k+1)\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

$\sin \frac{\pi}{x} < 0 \Leftrightarrow (2k+1)\pi < \frac{\pi}{x} < 2(2k+1)\pi$

Do đó hàm số tăng trên $\left(\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}\right) \quad k \in \mathbb{Z}$

Và giảm trên $\left(\frac{1}{2k+2}, \frac{1}{2k+1}\right) \quad k \in \mathbb{Z}$.

f) $f'(x) = \cos x - \sin x$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{4} \text{ trên } [0, 2\pi].$$

Hàm số tăng trên $\left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right)$.

Hàm số giảm trên $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$.

Bài 2: Cho hàm số $y = \frac{-1}{3}x^2 + (m-1)x^2 + (m+3)x - 4$.

a) Tìm m để hàm số luôn luôn giảm.

b) Tìm m để hàm số tăng trên $(0,3)$.

Hướng dẫn giải:

a) Ta có: $f'(x) = -x^2 + 2(m-1)x + m+3$. Để hàm số luôn luôn giảm ta phải có $\Delta' \leq 0 \quad \forall x \in R \Leftrightarrow m^2 - m + 4 \leq 0$: vô nghiệm.

Vậy không có giá trị nào của m để hàm số luôn luôn giảm.

b) Để hàm số tăng trên $(0,3)$. Ta phải có: $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (0,3)$

$$\Leftrightarrow x_1 \leq 0 \leq 3 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) \leq 0 \\ f(3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{12}{7}.$$

Bài 3: Tìm m để hàm số: $y = \frac{x^2 + 2mx + 3m^2}{x + 2m}$ đồng biến trên $(-\infty, -1)$.

Hướng dẫn giải:

$$D_y = R \setminus \{-2m\}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4mx + m^2}{(x + 2m)^2}.$$

Để hàm số đồng biến trên $(-\infty, -1)$ ta phải có: $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (-\infty, -1)$ và $-2m \notin (-\infty, -1)$.

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 4mx + m^2 \geq 0$$

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (-\infty, -1) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x_1 < x_2 \\ -2m \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ f(-1) \geq 0 \\ \frac{S}{2} + 1 > 0 \\ m \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 \leq m \leq 2 - \sqrt{3}$$

Bài 4: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $(a+b)^p \leq a^p + b^p \quad \forall a, b > 0, 0 \leq p \leq 1.$

b) $\sin x + \tan x > 2x \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2}).$

suy ra: $2^{\sin x} + 2^{\tan x} \geq 2^{x+1}$

c) Chứng minh: $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2} \quad \forall x > 0.$

Hướng dẫn giải:

a) $(a+b)^p \leq a^p + b^p \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} + 1\right)^p \leq \left(\frac{a}{b}\right)^p + 1.$

Xét $f(x) = 1 + x^p - (1+x)^p$ trên $(0, \infty).$

Ta có: $f'(x) = p \left[\frac{1}{x^{1-p}} - \frac{1}{(1+x)^{1-p}} \right] \geq 0 \quad \forall x \in (0, \infty).$

Do đó $f(x)$ tăng trên $(0, \infty).$

$\frac{a}{b} > 0 \Rightarrow f\left(\frac{a}{b}\right) > f(0) = 0 \Rightarrow \text{đpcm.}$

b) Xét $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$ trên $(0, \infty).$

Ta có $f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2$

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos x > \cos^2 x \Rightarrow f'(x) > \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 > 0$: Hàm số tăng

trên $(0, \frac{\pi}{2}). \forall x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$

$\sin x + \tan x - 2x > 0. \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \sin x + \tan x > 2x \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$

Ta có: $2^{\sin x} + 2^{\tan x} \geq 2\sqrt{2^{\sin x + \tan x}} > 2\sqrt{2^{2x}} = 2^{x+1}, \text{ đpcm.}$

c) Xét $f(x) = 1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$, ta có:

$f'(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) > \ln 1 \quad \forall x > 0 \Rightarrow f(x)$ tăng trên $(0, \infty).$

$x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0 \Leftrightarrow 1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2} \Rightarrow \text{đpcm.}$

Bài 5: Chứng minh: $(1+x)^a < 1 + \alpha x$, $\forall x > 0$, $a \in (0, 1)$, suy ra các bất đẳng thức sau:

a) $a^b + b^a > 1 \quad \forall a, b > 0$.

b) $(a+b)^c + (b+c)^a + (c+a)^b > 2 \quad \forall a, b, c > 0$.

Hướng dẫn giải:

Xét $f(x) = (1+x)^a - 1 - \alpha x$ trên $(0, \infty)$

$$f'(x) = a \left[\frac{1}{(1+x)^{1-a}} - 1 \right] < 0 \quad \forall a \in (0, 1) \Rightarrow \text{hàm số giảm.}$$

$$x > 0 \Rightarrow f(x) < f(0) \Leftrightarrow (1+x)^a < 1 + \alpha x.$$

a) Nếu $a \geq 1$ hoặc $b \geq 1$ thì bất đẳng thức đúng do đó ta chỉ cần chứng minh khi $0 < a, b < 1$.

Đặt $a = \frac{1}{1+x}, b = \frac{1}{1+y}$

$$a^b = \left(\frac{1}{1+x} \right)^{\frac{1}{1+y}} = \frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{1+y}}} > \frac{1}{1 + \frac{x}{1+y}} = \frac{1+y}{1+x+y}.$$

Tương tự: $b^a > \frac{1+x}{1+x+y}.$

Do đó: $a^b + b^a > \frac{1+x+y+1}{1+x+y} > 1 \Rightarrow \text{đpcm.}$

b) Nếu: Một trong 3 số a, b, c có ít nhất một số lớn hơn 1 thì bất đẳng thức đúng do đó ta chỉ cần chứng minh khi $0 < a, b, c \leq 1$.

Ta có: $(a+b)^c = \frac{1}{\left(\frac{1}{a+b} \right)^c} = \frac{1}{\left[1 + \frac{1-(a+b)}{a+b} \right]^c} > \frac{1}{1+c \left(\frac{1-(a+b)}{a+b} \right)} = \frac{a+b}{a+b+c}$

Tương tự: $(b+c)^a > \frac{b+c}{a+b+c}$

$(c+a)^b > \frac{c+a}{a+b+c}$

Do đó: $(a+b)^c + (b+c)^a + (c+a)^b > 2.$

Bài 6: Chứng minh với mọi số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 3 ta có:

$$n^{n+1} > (n+1)^n.$$

Hướng dẫn giải:

Bất đẳng thức tương đương: $(n+1) \ln n > n \ln(n+1)$

$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{\ln(n+1)} > \frac{n}{\ln n}$$

Xét $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ trên $[3, \infty]$ ta có:

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} > 0 \quad \forall x \geq 3 \Rightarrow \text{hàm số } y = f(x) \text{ tăng}$$

$$\forall n \geq 3, n+1 > n \Rightarrow f(n+1) > f(n) \Leftrightarrow \frac{n+1}{\ln(n+1)} > \frac{n}{\ln n}$$

Bài 7: Cho $x > y > 0$. Chứng minh: $\frac{x+y}{2} > 2 \frac{x-y}{\ln x - \ln y}$ (*)

Hướng dẫn giải:

$$x > y > 0 \Rightarrow \ln x > \ln y$$

$$(*) \Leftrightarrow \ln \frac{x}{y} > 2 \frac{x-y}{x+y} = 2 \frac{\frac{x}{y} - 1}{\frac{x}{y} + 1}$$

Xét $f(t) = \ln(t) - 2 \frac{t-1}{t+1} \quad (t > 1)$

$$f'(t) = \frac{t(t-1)^2}{t(t+1)} > 0 \quad \forall t > 1 \Rightarrow f(t) \text{ tăng.}$$

$$\frac{x}{y} > 1 \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) > f(1) \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài 8: Chứng minh phương trình: $3^x + 2^x - \frac{1}{3^x} - \frac{1}{2^x} - \frac{1}{6^x} = -x^3 + 4x^2 - 6x + 7$

có 1 nghiệm duy nhất. Tìm nghiệm đó.

Hướng dẫn giải:

Để ý về trái $y = 3^x + 2^x - \left[\left(\frac{1}{3} \right)^x + \left(\frac{1}{2} \right)^x + \left(\frac{1}{6} \right)^x \right]$ là hàm số tăng.

Về phải: $y = -x^3 + 4x^2 - 6x + 7 \Rightarrow y' = -3x^2 + 8x - 6 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số luôn giảm.

Do đó phương trình có nhiều nhất là 1 nghiệm

$x = 1$ là 1 nghiệm đặc biệt, do đó phương trình có 1 nghiệm duy nhất.

Bài 9:

a) Chứng minh phương trình: $x + \cos x = a$ có duy nhất 1 nghiệm âm khi $a < 1$ và duy nhất 1 nghiệm dương khi $a > 1$.

b) Chứng minh phương trình: $x.e^x = 2$ Có 1 nghiệm duy nhất, 1 nghiệm thuộc $(0,1)$

Hướng dẫn giải:

a) Xét $f(x) = x + \cos x - a$, ta có:

$$f'(x) = 1 - \sin x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \text{ là hàm tăng trên } \mathbb{R}.$$

$$f(0) = 1 - a.$$

Khi $a < 1 \Rightarrow f(0) > 0$ hàm $y = f(x)$ tăng trên $\mathbb{R}$, đồ thị cắt Oy tại điểm ở trên Ox do đó đồ thị chỉ cắt Ox tại một điểm có hoành độ âm. Vậy phương trình có 1 nghiệm âm duy nhất.

Khi $a > 1 \Rightarrow f(0) < 0$, lí luận tương tự $f(x) = 0$ có 1 nghiệm dương duy nhất.

b) Xét $f(x) = x.e^x - 2$ trên $(0,1)$, ta có:

$$f'(x) = e^x(1+x) \Rightarrow f'(x) > 0 \quad \forall x \in (0,1) \Rightarrow \text{hàm số tăng.}$$

$$f(0) = -2, f(1) = e - 2 > 0$$

Do đó trên phương trình: $x.e^x = 2$ có 1 nghiệm duy nhất thuộc $(0,1)$

Bài 10: Tìm $x, y \in \mathbb{R}$ thoả:
$$\begin{cases} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\operatorname{tg} y}{y} & (1) \\ \sin x + \cos x = \sqrt{2} & (2) \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Xét } f(t) = \frac{\operatorname{tg} t}{t} \Rightarrow f(t) = \frac{t - \sin t \cdot \cos t}{t^2 \cos^2 t}.$$

Xét $g(t) = t - \frac{1}{2} \sin 2t \Rightarrow g'(t) = 1 - \cos 2t \geq 0 \Rightarrow g(t)$ tăng.

$t > 0 \Rightarrow g(t) > g(0) = 0 \Rightarrow f'(t) > 0$: hàm số tăng.

$t < 0 \Rightarrow g(t) < g(0) = 0 \Rightarrow f'(t) < 0$: hàm số giảm.

Để ý hàm số $f(t)$ là chẵn do đó:

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, y = -x \end{cases}$$

Bài 11: Giải hệ:
$$\begin{cases} x\sqrt{y} - 5\sqrt{y} + 2 = 0 \\ y\sqrt{z} - 5\sqrt{z} + 2 = 0 \\ z\sqrt{x} - 5\sqrt{x} + 2 = 0 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $x = 0$ hay $y = 0$ hay $z = 0$ không phải là nghiệm.

Khi $x, y, z \neq 0$, hệ tương đương:
$$\begin{cases} x = 5 - \frac{2}{\sqrt{y}} & (1) \\ y = 5 - \frac{2}{\sqrt{z}} & (2) \\ z = 5 - \frac{2}{\sqrt{x}} & (3) \end{cases}$$

Xét $f(t) = 5 - \frac{2}{\sqrt{t}} \quad t > 0$.

$f'(t) = \frac{1}{\sqrt{t^3}} > 0 \Rightarrow$ hàm số tăng trên $(0, \infty)$.

Hệ tương đương:
$$\begin{cases} x = f(y) \\ y = f(z) \\ z = f(x) \end{cases}$$

Nếu: $x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \Leftrightarrow z < x \Rightarrow f(z) < f(x) \Leftrightarrow y < z$ nghĩa là:
 $x < y < z < x$ vô lí.

Do vai trò x, y, z như nhau nên: $x = y = z$.

$$(1) \Leftrightarrow x\sqrt{x} - 5\sqrt{x} + 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \vee \sqrt{x} = \sqrt{2} - 1.$$

Vậy hệ cơ nghiệm:
$$\begin{cases} x = y = z = 4 \\ x = y = z = 3 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Bài 12: Giải bất phương trình: $\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} > 2\sqrt{3} + \sqrt{4 - x}$.

Hướng dẫn giải:

Điều kiện:
$$\begin{cases} 4 - x \geq 0 \\ (x + 2)(2x^2 - x + 8) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4.$$

Xét $f(x) = \sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4 - x}$.

Ta có:
$$f'(x) = \frac{6(x^2 + x + 1)}{2\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16}} + \frac{1}{2\sqrt{4 - x}} > 0 \quad \forall x \in [-2, 4]$$

Hàm số tăng

Bất phương trình tương đương: $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow x \geq 1$.

Vậy bất phương trình có nghiệm là: $1 \leq x \leq 4$.

2.4. Bài tập Tự Luyện:

Bài 1: Khảo sát tính đơn điệu của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{x}$ b) $y = \frac{2x}{x^3 + 1}$

c) $y = \frac{2x}{\ln x}$ d) $y = 2\sin x + \tan x - 3x$ trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Bài 2: Tìm m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1.

Bài 3: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - (m+1)x + 4m^2 - 4m + 2}{x + 1 - m}$. Tìm m để hàm số xác

định và đồng biến trên $(0, \infty)$.

Bài 4: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $\ln(1+x) < x \quad \forall x > 0$.

b) $\sqrt[n]{ab} \leq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \quad \forall a, b > 0, n \in \mathbb{N}$.

c) $\tan a \cdot \tan b \geq \tan ab \quad \forall a, b \in (0, 1)$

d) $\tan n\alpha > n \tan \alpha \quad \forall \alpha \in \left(0, -\frac{\pi}{4(n-1)}\right), n \in \mathbb{N}^*.$

Bài 5: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $\frac{1}{y-x} \left[\ln \frac{y}{1-y} - \ln \frac{x}{1-x} \right] > 4$ với $0 < x, y < 1, x \neq y.$

b) Cho ΔABC , Chứng minh: $A \cos B + \sin A \cdot \cos C > 0.$

c) $3^{2 \sin x} + 3^{\frac{x}{\cos x}} \geq 2(27)^{\frac{x}{2}} \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$

Bài 6: Giải hệ:
$$\begin{cases} x^3 + 3x + \sqrt{3x+1} = 5 + y \\ y^3 + 3y + \sqrt{3y+1} = 5 + z \\ z^3 + 3z + \sqrt{3z+1} = 5 + x \end{cases}$$

Bài 7: Giải hệ:
$$\begin{cases} y^3 = 6x^2 - 12x + 8 \\ z^3 = 6y^2 - 12y + 8 \\ x^3 = 6z^2 - 12z + 8 \end{cases}$$

2.5. Hướng Dẫn – Đáp Số:

Bài 1:

d) $f'(x) = 2 \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 = \cos x + \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 > 3 - 3 = 0$

$\Rightarrow$ Hàm số tăng trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$

Bài 2:

+ Tìm khoảng nghịch biến của hàm số là $[x_1, x_2].$

+ Giải $x_2 - x_1 = 1$ (x_1, x_2 là nghiệm của $f'(x) = 0$).

Bài 3:

Giải hệ $\begin{cases} m-1 \leq 0 \\ y' \geq \forall x \geq 0 \end{cases}$. Đáp số: $\frac{2-\sqrt{7}}{3} \leq m \leq 1.$

Bài 4:

- b) Xem bài 4a. Thay $P = \frac{1}{n}$.
- c) Xét $f(x) = \operatorname{tg} b \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} b x$ và để ý $\operatorname{tg} b > b$.
- d) Xét $f(x) = \operatorname{tg} n x - n \operatorname{tg} x$.

Bài 5:

- a) Xét $f(t) = \ln \frac{t}{1-t} - 4t$ trên $(0,1)$.
- b) Bất đẳng thức tương đương
 $f(A) = -A \cos(A+C) + \sin A \cdot \cos C > 0 \quad A \in (0, \Pi)$
 $f'(A) = -\cos(A+C) + A \sin(A+C) + \cos A \cdot \cos C \quad \forall A, C \in (0, \Pi)$
 $\Rightarrow f(t)$ tăng, $A > 0 \Rightarrow f(A) > f(0) \Leftrightarrow \text{dpcm}$.
- c) Để ý: $3^{2 \sin x} + 3^{\operatorname{tg} x} \geq 2\sqrt{3^{2 \sin x + \operatorname{tg} x}}$.

Ta chứng minh: $2 \sin x + \operatorname{tg} x \geq 3x \quad \forall x \in (0, \frac{\Pi}{2})$

$$f'(x) = 2 \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 > 0 \Rightarrow f \text{ tăng } \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})..$$

$$x \in (0, \frac{\Pi}{2}) \Rightarrow x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow \text{dpcm}.$$

Bài 6: Xét $f(t) = t^3 + 3t + \sqrt{3t+1} - 5$ trên $\left[-\frac{1}{3}, \infty\right)$.

$$f'(t) = 3t^2 + 3 + \frac{3}{2\sqrt{3t+1}} > 0 \Rightarrow f \text{ tăng}.$$

$$x > y \Rightarrow f(x) > f(y) \Rightarrow y > z$$

$$y > z \Rightarrow f(y) > f(z) \Rightarrow z > x.$$

Do đó $x > y > z > x$: vô lí. Tương tự trường hợp $x < y$. Vậy hệ **chỉ có** nghiệm $x = y = z$.

$$\text{Khi đó: } x^3 + 3x + \sqrt{3x+1} = 5 + x.$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2x + \sqrt{3x+1} - 5 = 0.$$

Xét $g(x) = x^3 + 2x + \sqrt{3x+1} - 5 \Rightarrow g'(x) > 0$: Hàm số luôn tăng.

Do đó $g(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Hệ có nghiệm duy nhất: $x = y = z = 1$.

Bài 7:

Đề ý: $y^3 = 6 \left[(x-1)^2 + \frac{1}{3} \right] \geq 2 \Rightarrow y \geq \sqrt[3]{2}$, vậy $x, y, z \geq \sqrt[3]{2}$.

Xét $f(t) = 6t^2 - 12t + 8$ trên $[\sqrt[3]{2}, \infty]$

$$f'(t) = 12t - 12 > 0 \quad \forall t \in (\sqrt[3]{2}, \infty)$$

$$\text{Hệ tương đương: } \begin{cases} y^3 = f(x) \\ z^3 = f(y) \\ x^3 = f(z) \end{cases}$$

Giả sử: $x \leq y \leq z \Rightarrow f(x) \leq f(y) \leq f(z) \Leftrightarrow y^3 \leq z^3 \leq x^3 \Rightarrow x = y = z$.

$$\text{Hệ trở thành: } \begin{cases} (x-2)^3 = 0 \\ (y-2)^3 = 0 \\ (z-2)^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = 2 \text{ là nghiệm.}$$

III. Cực Trị Của Hàm Số

3.1. Tóm tắt lý thuyết:

Định lý Fermat: (điều kiện cần)

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại $x = x_0$ và đạt cực trị tại điểm đó thì

$$f'(x_0) = 0.$$

❖ **Định lý điều kiện đủ:**

Định lý 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trong lân cận của x_0

+ Nếu $f'(x_0) > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ và $f'(x_0) < 0 \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ thì hàm số đạt cực đại tại $(x_0, f(x_0))$.

+ Nếu $f'(x_0) < 0 \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ và $f'(x_0) > 0 \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ thì hàm số đạt cực tiểu tại $(x_0, f(x_0))$.

Định lí 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trong một lân cận của x_0 và $f'(x) = 0$.

+ Nếu $f''(x_0) > 0$ thì $(x_0, f(x_0))$ là điểm cực tiểu.

+ Nếu $f''(x_0) < 0$ thì $(x_0, f(x_0))$ là điểm cực đại.

3.2. Các Áp Dụng Cơ Bản:

❖ Khảo sát cực trị của hàm số:

PP + Tính $f'(x)$

+ Tìm nghiệm của $f'(x) = 0$

+ Xét dấu $f'(x)$ rồi áp dụng định lí 1

hoặc + Tính $f''(x)$ rồi áp dụng định lí 2.

❖ Tìm điều kiện (tham số) để hàm số đạt cực trị tại điểm cho trước.

PP + Tính $f'(x)$.

+ Áp dụng định lí Fermat để đưa về phương trình theo tham số – Giải tìm tham số.

+ Kiểm tra lại điều kiện đủ.

❖ Giá trị cực trị – Đường thẳng qua 2 điểm cực trị

PP + Áp dụng định lí Fermat ta có tung độ (giá trị) của cực trị thỏa:

$$\text{Nếu } y = \frac{u(x)}{v(x)} \text{ thì } y_0 = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}.$$

$$\text{Nếu } y = f'(x)(ax+b)+cx+d \text{ thì: } y_0 = cx_0 + d.$$

Đường thẳng qua 2 điểm cực trị

PP + Đối với hàm đa thức: – Viết $f(x) = f'(x)(ax+b)+cx+d$

– Lập luận đường thẳng qua 2 điểm cực trị là $y = cx + d$

+ Đối với hàm hữu tỉ:

– Nếu $\frac{u'(x)}{v'(x)} = ax+b$ thì $y = ax + b$ là đường thẳng qua 2 cực trị đó.

– Tìm tọa độ các điểm cực trị rồi dùng đường thẳng qua 2 điểm.

Cực trị có hoành độ – Tung độ thỏa điều kiện cho trước.

PP + Tính $f'(x)$, tìm điều kiện để có cực trị.

+ Dựa vào điều kiện cho trước của hoành độ (hoặc tung độ) cực trị đưa về khảo sát tính chất nghiệm của $f'(x) = 0$.

3.3. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Khảo sát cực trị của các hàm số sau:

a) $y = \frac{3}{4}x^4 - x^3 - 9x^2 + 7$

b) $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

c) $y = \frac{x}{\ln x}$

d) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x - 2}$.

Hướng dẫn giải:

a) Ta có: $f'(x) = 3x(x+2)(x-3)$

x	$-\infty$	-2	0	3	∞
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	∞	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		-9			∞

Hàm số đạt cực đại tại $(0, 7)$ và đạt cực tiểu tại $(-2, -9), \left(3, \frac{-161}{4}\right)$.

b) $f'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + x + 1)}$, Hàm số đạt cực đại tại $(-1, 3)$ và đạt cực tiểu tại $\left(1, \frac{1}{3}\right)$.

c) $D_y = (0, 1) \cup (1, \infty)$.

$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$

Hàm số đạt cực tiểu tại (e, e)

x	0	1	e	∞
y'	-	-	0	+
y	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
	$-\infty$	∞	e	∞

d) $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{(x^3 - 3x - 2)^2}}$.

Hàm số đạt cực đại tại $(-1, 0)$ và cực tiểu tại $(1, \sqrt[3]{-4})$

x	$-\infty$	-1	1	∞	
y'	+		-	0	+
y		↖ CD ↗			
		0	$\sqrt[3]{-4}$		∞

Bài 2: Khảo sát cực trị của các hàm số sau:

a) $y = 2\sin x + \cos 2x$ trên $[0, 2\pi]$.

b) $y = 2x^3 - 15x^2 - 84x + 8$

c) $y = e^x \sin x$ trên $[0, 2\pi]$.

Hướng dẫn giải:

a) $f'(x) = 2\cos x(1 - 2\sin x)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{5\pi}{6}, x = \frac{3\pi}{2} \text{ trên } [0, 2\pi]$$

$$f''(x) = -2\sin x - 4\cos 2x$$

$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -3 \Rightarrow A\left(\frac{\pi}{6}, \frac{3}{2}\right) \text{ là điểm cực đại.}$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \Rightarrow B\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) \text{ là điểm cực tiểu.}$$

$$f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -3 \Rightarrow C\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{3}{2}\right) \text{ là điểm cực đại.}$$

$$f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 6 \Rightarrow D\left(\frac{3\pi}{2}, -3\right) \text{ là điểm cực tiểu.}$$

b) $f'(x) = 6x^2 - 30x - 84$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 7.$$

$$f''(x) = 12x - 30.$$

$$f''(-2) = -54 \Rightarrow M(-2, 100) \text{ là điểm cực đại.}$$

$$f''(7) = 54 \Rightarrow N(7, 629) \text{ là điểm cực tiểu.}$$

c) $f'(x) = (\sin x + \cos x)e^x$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}, x = \frac{7\pi}{4}.$$

$f''(\frac{3\pi}{4}) < 0 \Rightarrow \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}\right)$ là điểm cực đại.

$f''(\frac{7\pi}{4}) > 0 \Rightarrow \left(\frac{7\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{7\pi}{4}}\right)$ là điểm cực tiểu.

Bài 3:

a) Cho hàm số: $y = ax^3 - 2x^2 + 3x - 1$. Tìm a để hàm số đạt cực trị tại $x = -1$.

b) Cho hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$. Tìm a, b, c để hàm số đạt cực trị tại A(-2, 16) và B(2, -16).

Hướng dẫn giải:

a) $f'(x) = 3ax^2 - 4x + 3$.

Để hàm số đạt cực trị tại $x = -1$, thì cần phải có $f'(-1) = 0$

$$\Leftrightarrow 3a - 7 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-7}{3}.$$

Thử lại: Khi $a = \frac{-7}{3}$ thì $f'(x) = -7x^2 - 4x + 3$,

$f'(x)$ đổi dấu khi qua $x = -1 \Rightarrow$ đpcm.

b) $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.

Hàm số đạt cực trị tại A $\Rightarrow f'(-2) = 0 \Leftrightarrow 12 - 4a + b = 0$ (1)

Hàm số đạt cực trị tại B $\Rightarrow f'(2) = 0 \Leftrightarrow 12 + 4a + b = 0$ (2)

A ở trên đồ thị $\Rightarrow 16 = -8 + 4a - 2b + c = 0$ (3)

Giải hệ (1), (2), (3) $\Rightarrow a = c = 0, b = -12$.

Thử lại hàm số $y = x^3 - 12x$ đạt cực trị tại A và B.

Bài 4: Cho hàm số: $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$.

Tìm m để hàm số có 3 điểm cực trị.

Hướng dẫn giải:

Ta có $f'(x) = 4mx^3 + 2(m^2 - 9)x = 2x[2mx^2 + m^2 - 9]$.

Để hàm số có 3 điểm cực trị thì $f'(x)$ đổi dấu 3 lần

$\Leftrightarrow f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

$$\text{Mà } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2mx^2 + m^2 - 9 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Để có 3 điểm cực trị thì (*) phải có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow m(m^2 - 9) < 0 \Leftrightarrow m < -3 \vee 0 < m < 3.$$

Bài 5: Cho hàm số: $y = 3x^4 + 4(\cos \alpha - \sin \alpha)x^3 + 3x^2 \sin 2\alpha$ với $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Hãy tìm α để hàm số đạt cực tiểu tại điểm có hoành độ thoả:

$$-\sin \alpha \leq x \leq \cos \alpha \quad (*)$$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có } f'(x) = 12x^3 + 12(\cos \alpha - \sin \alpha)x^2 - 6x \sin 2\alpha.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sin \alpha, x = -\cos \alpha \end{cases}$$

$$f''(0) = -6 \sin 2\alpha < 0 \Rightarrow x = 0 \text{ là hoành độ cực đại.}$$

$$f''(-\cos \alpha) = 36 \cos^2 \alpha - 24 \cos^2 \alpha + 6 \sin 2\alpha > 0 \Rightarrow x = -\cos \alpha \text{ là hoành độ cực tiểu.}$$

$$f''(-\cos \alpha) > 0 \text{ nên } x = \sin \alpha \text{ là hoành độ cực tiểu tại điểm có hoành độ thoả: } -\sin \alpha \leq x \leq \cos \alpha.$$

Bài 6:

a) Cho hàm số $y = x^4 + 4mx^3 + 3(m+1)x^2 + 1$. Tìm m để hàm số chỉ có cực tiểu mà không có cực đại.

b) Cho hàm số: $y = -2x + k\sqrt{x^2 + 1}$. Tìm k để hàm số chỉ có 1 cực tiểu và không có cực đại.

Hướng dẫn giải:

a) Ta có: $f'(x) = 2x(2x^2 + 6mx + 3(m+1))$, vì

$f'(x) = 0$ luôn có nghiệm $x = 0$, do đó để hàm số chỉ có 1 cực tiểu mà không có cực đại thì $f'(x)$ chỉ đổi dấu 1 lần từ âm sang dương, ta có 2 khả năng xảy ra

$$+ \text{ Phương trình: } 2x^2 + 6mx + 3(m+1) = 0 \text{ có } \Delta \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 9m^2 - 6m - 6 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{7}}{3} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{7}}{3}.$$

+ Phương trình: $2x^2 + 6mx + 3(m+1) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm $x = 0 \Leftrightarrow m = -1$. Thử lại các trường hợp trên đều có $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương.

Vậy khi $m = -1$ hay $m < \frac{1-\sqrt{7}}{3} \vee m > \frac{1+\sqrt{7}}{3}$ thì hàm số chỉ có 1 cực tiểu mà không có cực đại.

b) Ta có: $f'(x) = -2 + \frac{kx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{kx - 2\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{k^2+1}}$.

$$f''(x) = \frac{k}{(x^2+1)(x^2+1)}$$

Gọi x_0 là hoành độ điểm cực tiểu, ta có:
$$\begin{cases} kx_0 = 2\sqrt{x_0^2+1} & (1) \\ \frac{k}{(x_0^2+1)\sqrt{x_0^2+1}} > 0 & (2) \end{cases}$$

Từ (2) $\Rightarrow k > 0$

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} x_0 > 0 \\ k^2 x_0^2 = 4(x_0^2 + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ x_0 > 0 \\ (k^2 - 4)x_0^2 = 4 & (3) \end{cases}$$

Để chỉ có 1 cực tiểu thì (3) chỉ có 1 nghiệm $x_0 > 0 \Leftrightarrow k < -2 \vee k > 2$.

Kết hợp với điều kiện (2) ta chỉ chọn $k > 2$

Vậy khi $k > 2$ thì hàm số chỉ có 1 cực tiểu.

Bài 7:

a) Cho hàm số: $y = \frac{u(x)}{v(x)}$. Chứng minh rằng nếu $y'(x_0) = 0$ và $v'(x_0) \neq 0$

$$\text{thì } y'' = \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}.$$

b) Cho hàm số $y = \frac{2x^2 + 3x + m}{x - m}$.

Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu thỏa: $|y_{cd} - y_{ct}| > 8$.

Hướng dẫn giải:

a) Ta có: $y = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow y' = \frac{u'(x).v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}$

$$y'(x_0) = 0 \Leftrightarrow u'(x_0).v(x_0) - v'(x_0).u(x_0) \Leftrightarrow \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)} = \frac{u(x_0)}{v(x_0)} \Rightarrow \text{dpcm.}$$

b) Ta có $y' = \frac{2(x^2 - 2mx + m)}{(x - m)^2}$

Để hàm số có cực đại, cực tiểu thì y' đổi dấu 2 lần $\Leftrightarrow x^2 - 2mx + m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác m.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m > 0 \\ m^2 - 2m^2 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0 \vee m > 1.$$

Gọi x_1, x_2 là hoành độ cực trị thì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - 2mx + m = 0 \text{ và } y_{cd} = 4x_1 - 3; y_{ct} = 4x_2 - 3.$$

$$\text{Do đó: } |y_{cd} - y_{ct}| > 8 \Leftrightarrow |x_1 - x_2| > 2$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 > 4 \Leftrightarrow 4m^2 - 4m - 4 > 0$$

$$\Leftrightarrow m < \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \vee m > \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Bài 8: Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$. Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu và viết phương trình đường thẳng qua 2 điểm cực trị.

Hướng dẫn giải:

$$f'(x) = 6(x^2 + (m-1)x + m-2)$$

$$\Delta' = (m-3)^2.$$

Để hàm số có cực đại, cực tiểu ta phải có $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m \neq 3$.

$$\text{Chia } f(x) \text{ cho } f'(x) \text{ ta có số dư là: } g(x) = -(m-3)^2x - (m^2 - 3m + 3).$$

$$\text{Do đó đường thẳng qua 2 điểm cực trị là: } y = -(m-3)^2x - (m^2 - 3m + 3).$$

Bài 9: Cho hàm số: $y = \frac{x^2 + (\sin \alpha)x + |\sin \alpha| - 1}{x + 1}$. Tìm α để hàm số có cực

đại, cực tiểu thỏa: $y_{cd} - y_{ct} = -6$.

Hướng dẫn giải:

Ta có $y' = \frac{x^2 + 2x + \sin \alpha - |\sin \alpha| + 1}{(x+1)^2}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + \sin \alpha - |\sin \alpha| + 1 = 0.$$

Điều kiện có cực đại và cực tiểu: $\begin{cases} \Delta > 0 \\ y'(-1) \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha < 0 \Leftrightarrow (2k+1)\pi < \alpha < (k+1)2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (*)$$

$$y_{\text{cđ}} + y_{\text{cđ}} = -6 \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2) + 2\sin \alpha = -6.$$

$$\sin \alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\pi}{2} + k2\pi.$$

Thỏa điều kiện (*).

Do đó khi $\alpha = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ thì hàm số có cực đại, cực tiểu thỏa:

$$y_{\text{cđ}} - y_{\text{cđ}} = -6.$$

3.4. Bài tập Tự Luyện:

Bài 1: Chứng minh rằng hàm số $y = \sqrt[3]{x^4}$ không có đạo hàm tại $x = 0$ nhưng vẫn đạt cực trị tại đó.

Bài 2: Cho hàm số $y = (x-a)(x-b)(x-c)$. Chứng minh rằng hàm số luôn luôn có cực đại, cực tiểu với $a < b < c$

Bài 3: Biện luận theo a các cực trị của các hàm số:

a) $y = x^3 - 2ax^2 + a^2x$

b) $y = x + \frac{a}{x}$.

Bài 4: Tìm m để hàm số đạt cực tiểu tại điểm có hoành độ nhỏ hơn 2, với hàm số $y = x^3 - 2x^2 + mx + 1$.

Bài 5: Cho hàm số $y = \frac{mx^2 - 2x + m}{x^2 - x}$.

a) Tìm m để hàm số tăng trên miền xác định của hàm số.

b) Tìm m để hàm số chỉ có 1 cực trị.

c) Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu tại các điểm có hoành độ đều dương.

Bài 6: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Tìm a để hàm số có 2 điểm cực trị trong đó 1 điểm ở trong và 1 điểm ở ngoài đường tròn có phương trình: $x^2 + y^2 - ax - 4ay + 5a^2 - 1 = 0$.

Bài 7: Tìm a để hàm số: $y = -2x + 2 + a\sqrt{x^2 - 4x + 5}$ chỉ có 1 cực đại.

Bài 8: Cho hàm số: $y = (m+1)\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^2 - 3m\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) + 4m$. Tìm m để hàm số có 1 cực tiểu duy nhất.

Bài 9: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x + m}{x^2 - 1}$.

a) Tìm m để hàm số có cực đại và cực tiểu.

b) Viết phương trình đường thẳng qua 2 điểm cực trị.

3.5. Hướng Dẫn – Đáp Số:

Bài 1: $y' = \frac{-4}{5\sqrt[5]{x}}$ do đó y' không tồn tại tại $x = 0$.

Vì y' vẫn không đổi dấu (và hàm số xác định tại $x = 0$) từ dương sang âm khi qua $x = 0$ nên hàm số đạt cực trị tại $x = 0$.

Bài 2: Chứng minh: $f'(a).f'(b) < 0 \Rightarrow f'(x) = 0$ có nghiệm $\in (a, b)$

$f'(b).f'(c) < 0 \Rightarrow f'(x) = 0$ có nghiệm $\in (b, c)$.

Bài 3: a) $a = 0$: Hàm số không có cực trị

$a > 0$: Hàm số có cực đại $\left(\frac{a}{3}, \frac{4}{27}, a^3\right)$ và có cực tiểu $(a, 0)$.

$a < 0$: Hàm số có cực đại $(a, 0)$ và cực tiểu $\left(\frac{a}{3}, \frac{4}{27}, a^3\right)$.

Bài 4: $y' = 3x^2 - 4x - m$ có $x_1 < x_2 < 2$.

$$\Leftrightarrow -\frac{4}{3} < m < 4.$$

Bài 5:

a) $0 \leq m \leq 1$

b) $m = 2$

c) $1 < m < 2$.

Bài 6:

$$+ CD(0,2), CT(2, -2)$$

$$+ P^{A/(c)} \cdot P^{B/(c)} < 0 \Leftrightarrow (5a^2 + 7)(5a^2 - 8a + 3) < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{5} < a < 1.$$

Bài 7:

$$+ f'(x) = -2 + \frac{a(x-2)}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}; f''(x) = \frac{a}{\sqrt{(x^2 - 4x + 5)^3}}.$$

Hàm số đạt cực đại tại $x = x_0$ ta phải có:

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a(x_0 - 2)}{\sqrt{x_0^2 - 4x_0 + 5}} = 2 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2\sqrt{x_0^2 - 4x_0 + 5}}{x_0 - 2} \\ x_0 < 2 \end{cases}$$

a phải thuộc miền giá trị của $g(x) = \frac{2\sqrt{x^2 - 4x + 5}}{x - 2}$ trên $(-\infty, 2)$.

Đáp số: $-\infty < a < -2$.

$$\text{Bài 8: Ta có } f'(x) = \left[2(m+1) \left(\frac{x^2}{x^2 + 1} \right) - 3m \right] \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

Để ý rằng $f'(x) = 0$ luôn luôn có nghiệm $x = 0$.

Do đó để có duy nhất 1 cực trị thì

$$2(m+1) \frac{x^2}{x^2 + 1} - 3m = 0 \text{ vô nghiệm hoặc có 1 nghiệm } x = 0.$$

Đáp số: $m \leq 0 \vee m > 0$.

Bài 9:

$$a) m < -2 \vee m > 0.$$

$$b) \text{ Toạ độ cực trị thoả } \begin{cases} y = \frac{x^2 + x + m}{x^2 - 1} \\ y = \frac{2x + 1}{2x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} yx^2 - y = x^2 + x + m \\ 2xy = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2yx^2 - 2y = 2x^2 + 2x + m \\ 2yx = 2x^2 + x \end{cases} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + m$$

Đáp số: $y = -\frac{1}{2}x + m$.

IV. Giá trị lớn nhất – Giá trị nhỏ nhất

4.1 Tóm tắt lý thuyết:

Định nghĩa:

$$M = \max_{x \in D} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq M \quad \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = M \end{cases}$$

$$m = \min_{x \in D} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq m \quad \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = m \end{cases}$$

4.2. Các Áp Dụng Cơ Bản:

1) Tìm giá trị lớn nhất – Giá trị nhỏ nhất bằng đạo hàm

PP. Để tìm M, m của hàm số $y = f(x)$ trên $[a, b]$ ta thực hiện:

- + Tính $f'(x)$, tìm nghiệm của $f'(x) = 0$ trên $[a, b]$.
- + Tính các giá trị $f(a), f(b), f(x_i)$ (x_i là nghiệm của $f'(x) = 0$).
- + So sánh rồi chọn M, m.

Chú ý: Để tìm M và m trên (a, b) thì thực hiện như trên nhưng thay $f(a)$ bằng $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ và $f(b)$ bằng $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ (các giới hạn này chỉ để so sánh không chọn làm GTLN, GTNN).

- Nếu f tăng trên $[a, b]$ thì $M = f(b), m = f(a)$.
- Nếu f giảm trên $[a, b]$ thì $m = f(b), M = f(a)$.
- Nếu trên D hàm số liên tục và chỉ có 1 cực trị thì giá trị cực trị đó là GTLN nếu là cực đại và là GTNN nếu là cực tiểu.

2) Chứng minh bất đẳng thức bằng GTLN, GTNN

- PP. Để chứng minh các bất đẳng thức dạng $f(x) \geq A \quad \forall x \in D$ hoặc $f(x) \leq A \quad \forall x \in D$ ta có thể tìm $\max f(x)$, $\min f(x)$ trên D .

+ Nếu $\min f(x) \geq A \quad \forall x \in D$ thì $f(x) \geq A \quad \forall x \in D$

+ Nếu $\max f(x) \leq A \quad \forall x \in D$ thì $f(x) \leq A \quad \forall x \in D$

3) Áp dụng GTLN, GTNN để tìm điều kiện cho phương trình $f(x) = m$ có nghiệm trên D

PP: Áp dụng tính chất: nếu $f(x)$ liên tục trên D có M, m là GTLN, GTNN thì phương trình: $f(x) = k$ có nghiệm trong D khi và chỉ khi: $m \leq k \leq M$.

4.3. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Tìm giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của các hàm số:

a) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ trên $\left[-2, \frac{5}{2}\right]$

b) $y = x^2 \ln x$ trên $[1, e]$

c) $y = xe^{-x}$ trên $[0, \infty]$

d) $y = \sin x \cdot \sin 2x$ trên $[0, \pi]$

e) $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$ trên $[2, 4]$

Hướng dẫn giải:

a) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2.$

$$f(-2) = 3; f(-1) = 8; f(2) = -19, f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{33}{2}$$

Do đó: $\max f(x) = 8, \min f(x) = -19.$

b) $f'(x) = x[1 + 2 \ln x] > 0 \quad \forall x \in [1, e]$ do đó

$$\max f(x) = f(e) = e^2, \min f(x) = f(1) = 0.$$

c) $f'(x) = (1-x)e^{-x}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

$$f(0) = 0; f(1) = \frac{1}{e}, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

$$\text{Vậy } \max f(x) = \frac{1}{e}, \min f(x) = 0.$$

d) $f(x) = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(3 \sin 3x - \sin x)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \\ x = \pi \Rightarrow f(\pi) = 0 \\ x = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow f(x) = \frac{4}{3\sqrt{3}} \\ x = \arccos \frac{-\sqrt{3}}{3} \Rightarrow f(x) = \frac{-4}{3\sqrt{3}} \end{cases}$$

Vậy $\text{Max } f(x) = \frac{4}{3\sqrt{3}}, \text{Min } f(x) = \frac{-4}{3\sqrt{3}}$.

e) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

$$f(2) = f(4) = \sqrt{2}; f(3) = 2.$$

$$\text{Max } f(x) = 2, \text{Min } f(x) = \sqrt{2}.$$

Bài 2: Cho dãy (a_n) xác định bởi: $a_n = \frac{n^2}{n^3 + 200}$. Tìm số hạng lớn nhất của dãy.

Hướng dẫn giải:

Xét: $f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 200}$ trên $[1, \infty)$. Ta có

$$f'(x) = \frac{x(400 - x^3)}{(x^3 + 200)^2}$$

Do đó $\text{Max } f(x) = f(\sqrt[3]{400})$.

Đề ý: $7 < \sqrt[3]{400} < 8$ do đó số hạng lớn nhất của (a_n) chỉ có thể là a_7

hoặc a_8 . $a_7 = \frac{49}{543}, a_8 = \frac{8}{89}$ Do đó số hạng lớn nhất của (a_n) là:

$$a_7 = \frac{49}{543}.$$

Bài 3: Cho hàm số: $y = x^4 - 6bx^2 + b^2$. Biện luận theo b giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-2, 1]$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 12bx = 4x(x^2 - 3b)$.

+ Nếu: $b < 0$ thì $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$$f(0) = 0; f(1) = b^2 - 6b + 1, f(-2) = b^2 - 24b + 16.$$

Do đó: $\text{Max } f(x) = b^2 - 24b + 16, \text{Min } f(x) = b^2$.

+ Nếu: $b > 0$ thì $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{3b}$. Dựa vào tính chất của hàm số chẵn ta xét trên $[-2, 0]$.

$$\text{Khi } -2 < -\sqrt{3b} < 0 \Leftrightarrow 0 < b < \frac{4}{3}: \text{Min } f(x) = f(-\sqrt{3b}) = -8b^2$$

$$\text{Max } f(x) = f(-2) = b^2 - 24b + 16.$$

$$\text{Khi } -\sqrt{3b} < -2 \Leftrightarrow b > \frac{4}{3}, \text{Min } f(x) = f(-2) = b^2 - 24b + 16.$$

$$\text{Max } f(x) = f(0) = b^2.$$

Bài 4: Cho phương trình $x^2 + (2a - 6)x + a - 13 = 0$. Với $a \geq 1$. Tìm a để nghiệm lớn nhất của phương trình đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải:

Ta có phương trình có 2 nghiệm: $x_1 = 3 - a - \sqrt{a^2 - 7a + 22}$

$$x_2 = 3 - a + \sqrt{a^2 - 7a + 22}.$$

Xét nghiệm lớn $f(a) = 3 - a + \sqrt{a^2 - 7a + 22}$ trên $[1, \infty)$.

$$f'(x) = \frac{2a - 7 - 2\sqrt{a^2 - 7a + 22}}{2\sqrt{a^2 - 7a + 22}}$$

$$\text{Vì } 2\sqrt{a^2 - 7a + 22} = \sqrt{4\left(a - \frac{7}{2}\right)^2 + 39} \geq |2a - 7| \Rightarrow f'(a) < 0$$

Hàm số giảm trên $[1, \infty)$. Do đó: $\text{Max } f(a) = f(1) = 6$

Vậy khi $a = 1$ thì nghiệm lớn của phương trình là lớn nhất.

Bài 5: Tìm $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = x^4 - 2x^2 \sin^2 \alpha - 2(1 + \cos \alpha)^3 \text{ trên } [-1 - \cos \alpha, 1 + \cos \alpha] \text{ là nhỏ nhất.}$$

Hướng dẫn giải:

Đề ý rằng $y = f(x)$ là hàm số chẵn nên ta chỉ cần xét trên $[0, 1 + \cos \alpha]$.

$$f'(x) = 4x(x^2 - \sin \alpha); f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sin \alpha \end{cases}$$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \sin \alpha$ do đó GTLN là $f(0)$ hoặc $f(1 + \cos \alpha)$.

$$\text{Mà } f(0) = -2(1 + \cos \alpha)^3$$

$$f(1 + \cos \alpha) = 3(1 + \cos \alpha)^3 (\cos \alpha - 1).$$

$$\text{Xét } f(0) - f(1 + \cos \alpha) = 3(1 + \cos \alpha)^3 \left(\frac{1}{3} - \cos \alpha \right) \text{ trên } \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right].$$

$$\text{Ta có } \text{Max } y = -2(1 + \cos \alpha)^3 \text{ khi } 0 \leq \cos \alpha \leq \frac{1}{3}.$$

$$\text{Max } y = 3(1 + \cos \alpha)^3 (\cos \alpha - 1) \text{ khi } \frac{1}{3} \leq \cos \alpha \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Đặt } t = \cos \alpha \text{ xét } g(t) = \begin{cases} -2(1+t)^3 & \text{khi } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ 3(1+t)^3(t-1) & \text{khi } \frac{1}{3} < t \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } g'(t) = \begin{cases} -6(1+t)^2 & \text{khi } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ 3(1+t)^2(4t-2) & \text{khi } \frac{1}{3} < t < \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\text{Min } g(t) = g\left(\frac{1}{2}\right).$$

$$t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

Khi $\alpha = \frac{\pi}{3}$ thì giá trị lớn nhất của y là nhỏ nhất.

Bài 6: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

$$a) \frac{2}{3} \leq \frac{x^2+1}{x^2+x+1} \leq 2 \quad \forall x \in R.$$

$$b) 2\sqrt{3} \leq 3^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} \leq 4 \quad \forall x \in R.$$

$$c) \text{ Cho } x, y, z > 0 \text{ thoả } x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

$$\text{Chứng minh: } \frac{x}{y^2+z^2} + \frac{y}{z^2+x^2} + \frac{z}{x^2+y^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Hướng dẫn giải:

$$a) f'(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

$$f(1) = \frac{2}{3}, f(-1) = 2. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1.$$

$$\text{Do đó: } \text{Max } f(x) = 2; \text{Min } f(x) = \frac{2}{3} \leq f(x) \leq 2 \quad \forall x \in R$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq \frac{x^2+1}{x^2+x+1} \leq 2 \quad \forall x \in R.$$

$$b) \text{ Ta có: } 3^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} = 3^{\sin^2 x} + \frac{3}{3^{\sin^2 x}}$$

$$\text{Đặt } t = 3^{\sin^2 x} \in [1, 3], \text{ xét } f(t) = t + \frac{3}{t} \text{ trên } [1, 3]$$

$$f'(t) = 1 - \frac{3}{t^2} \Rightarrow f'(t) = 0, t = \sqrt{3}$$

$$f(1) = 4, f(3) = 4, f(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} \Rightarrow \text{Max } f(x) = 4, \text{Min } f(x) = 2\sqrt{3}.$$

$$\text{Do đó: } 2\sqrt{3} \leq f(t) \leq 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{3} \leq 3^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} \leq 4.$$

$$c) \text{ Đề ý: } x, y, z > 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow 0 < x, y, z < 1.$$

$$\text{Bất đẳng thức tương đương: } \Leftrightarrow \frac{x^2}{x(1-x^2)} + \frac{y^2}{y(1-y^2)} + \frac{z^2}{z(1-z^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Xét } f'(t) = t(1-t^2) = -t^3 + t \text{ trên } [0, 1]$$

$$f'(t) = -3t^2 + 1$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f(0) = 0, f(1) = 0, f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9} \Rightarrow \text{Max } f(t) = \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

$$\text{Do đó: } 0 \leq f(t) \leq \frac{2\sqrt{3}}{9} \Rightarrow \frac{1}{f(t)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{x^2}{f(x)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} x^2, \frac{y^2}{f(y)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} y^2, \frac{z^2}{f(z)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} z^2$$

$$\text{Vậy: } \frac{z^2}{z(1-z^2)} + \frac{z^2}{z(1-z^2)} + \frac{z^2}{z(1-z^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài 7: Cho $f(x) = x^n + (c-x)^n$ với $c > 0, n \in \mathbb{N}$.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$.

b) Chứng minh: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n + b^n}{2} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}.$

Hướng dẫn giải:

a) $f(x) = x^n + (c-x)^n \Rightarrow f'(x) = n.x^{n-1} - n(c-x)^{n-1}.$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = c - x$$

$$f''(x) = n(n-1) \left[x^{n-2} + (c-x)^{n-2} \right]$$

$$f''\left(\frac{c}{2}\right) = 2n(n-1) \left(\frac{c}{2}\right)^{n-2} > 0 \Rightarrow x = \frac{c}{2} \text{ là hoành độ cực tiểu.}$$

$$\text{Min } f(x) = f\left(\frac{c}{2}\right) = 2\left(\frac{c}{2}\right)^n.$$

b) $\text{Min } f(x) = 2\left(\frac{c}{2}\right)^n \Rightarrow f(x) \geq 2\left(\frac{c}{2}\right)^n.$

$$\Leftrightarrow x^n + (c-x)^n \geq 2\left(\frac{c}{2}\right)^n \quad \forall c > 0.$$

Chọn $x = a, c = a + b > 0$ ta được: $a^n + b^n \geq 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^n.$

Bài 8: Chứng minh $\forall x \geq 0$ và $\alpha > 1$ ta luôn luôn có:

$$x^\alpha + \alpha - 1 \geq \alpha x.$$

Suy ra: $\forall a, b, c > 0$ ta đều có

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{3/2} + \left(\frac{b}{c}\right)^{3/2} + \left(\frac{c}{a}\right)^{3/2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

Hướng dẫn giải:

Khi $x = 0$ thì bất đẳng thức đúng.

Khi $x > 0$, xét hàm: $f(x) = x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1$

Ta có: $f'(x) = \alpha [x^{\alpha-1} - 1]$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\min f(x) = f(1) = 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0 \Leftrightarrow x^\alpha + \alpha - 1 \geq \alpha x.$$

$$\text{Áp dụng chọn } x = \frac{a}{b}, \alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{3/2} \geq \frac{3}{2}\left(\frac{a}{b}\right) - \frac{1}{2}$$

$$\text{Tương tự} \quad \left(\frac{b}{c}\right)^{3/2} \geq \frac{3}{2}\left(\frac{b}{c}\right) - \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{c}{a}\right)^{3/2} \geq \frac{3}{2}\left(\frac{c}{a}\right) - \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } \left(\frac{a}{b}\right)^{3/2} + \left(\frac{b}{c}\right)^{3/2} + \left(\frac{c}{a}\right)^{3/2} &\geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) - \frac{3}{2} \\ &\geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \Rightarrow \text{đpcm.} \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$

Bài 9: Tìm m để phương trình: $(2 + 2 \sin 2x) = m(1 + \cos x)^2$ có nghiệm trên

$$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Phương trình tương đương: } m = \frac{2 + 2 \sin 2x}{(1 + \cos x)^2} \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = \tan \frac{x}{2} \in [-1, 1] \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$(1) \Leftrightarrow t^4 - 4t^3 + 2t^2 + 4t + 1 = 2m.$$

Xét $f(t) = t^4 - 4t^3 + 2t^2 + 4t + 1$ trên $[-1, 1]$.

Ta có: $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1, t = 1 - \sqrt{2}, t = 1 + \sqrt{2}$ (loại).

$$\min f(t) = 0, \max f(t) = 4.$$

Để phương trình có nghiệm ta phải có $0 \leq 2m \leq 4$.

Vậy khi $0 \leq m \leq 2$ thì phương trình có nghiệm $\in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

4.4. Bài tập tự luyện :

Bài 1: Tìm giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau:

a) $y = \frac{(x-2)^2}{x}$ trên $(0, \infty)$

b) $y = 3 + \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ trên $\mathbb{R}$

c) $y = x^4 - 2x^2 + 3$ trên $[-3, 2]$

d) $y = \sin 2x - x$ trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Bài 2:

a) Tìm giá trị lớn nhất của $y = \sin x + 3\sin 2x$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $y = \cos^2 x - \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos x}$.

Bài 3: Chứng minh các bất đẳng thức sau

a) $\sin 2x < \frac{2}{3x - x^3} \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

b) Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa $x + y + z = 1$.

Chứng minh: $xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$

c) Chứng minh $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, ta có

$$\sqrt{17} \leq \sqrt{\cos^2 \alpha + 4\cos \alpha + 6} + \sqrt{\cos^2 \alpha - 2\cos \alpha + 3} \leq \sqrt{2} + \sqrt{11}$$

d) Cho $a, b \geq 0, a + b = 1$. Chứng minh:

$$a^n + b^n > \frac{1}{2^{n-1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Bài 4: Tìm số hạng lớn nhất của dãy (a_n) xác định bởi: $a_n = \frac{n-1}{n^2-n+7}$.

Bài 5: Cho hàm số: $y = \frac{x^2 - (m+1)x - m^2 + 4m - 2}{x-1}$.

Tìm m để hàm số có cực đại và cực tiểu sao cho tích số cực đại và giá trị cực tiểu đạt giá trị nhỏ nhất.

4.5. Hướng dẫn – đáp số:

Bài 1:

a) $\text{Min } y = 2$

b) $\text{Min } y = 5$

c) $\text{Max } y = 66, \text{Min } y = 2$

d) $\text{Max } y = \frac{\pi}{2}, \text{Min } y = -\frac{\pi}{2}$.

Bài 2:

a) $\text{Max } y = \frac{5\sqrt{5}}{3}$

b) $\text{Min } y = 0$ (đặt $t = \cos x + \frac{1}{\cos x}$).

Bài 3:

a) Chứng minh: $3x - x^3 > 0 \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Bất đẳng thức tương đương: $3x - x^3 < \frac{2}{\sin 2x}$

Xét $g(x) = 3x - x^3 \Rightarrow \text{Min } y = 2 \Rightarrow 3x - x^3 \leq 2$

$\frac{2}{\sin 2x} \geq 1$. Chứng minh đẳng thức không đồng thời xảy ra.

b) Do vai trò x, y, z như nhau và $0 \leq x, y, z \leq 1$ nên phải tồn tại ít nhất 1 số nhỏ hơn hoặc bằng $\frac{1}{3}$. Giả sử $0 \leq z \leq \frac{1}{3}$.

Biến đổi:

$$xy + yz + zx - 2xyz = xy(1-2z) + (x+y)z \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 (1-2z) + (x+y)z$$

$$\Leftrightarrow xy + yz + zx - 2xyz \leq \left(\frac{1-z}{2}\right)(1-2z) + (1-z)z = \frac{1}{4}(-2z^3 + z^2 + 1)$$

$$\text{Xét } f(z) = \frac{1}{4}(-2z^3 + z^2 + 1) \text{ trên } \left[0, \frac{1}{3}\right] \Rightarrow \text{Max } f(x) = \frac{7}{27} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

c) Đặt $t = \cos \alpha \in [-1, 1]$

$$\text{Xét } f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 6} + \sqrt{x^2 - 2x + 3} \text{ trên } [-1, 1]$$

$$\text{Max } f(x) = \sqrt{2} + \sqrt{11}, \text{Min } f(x) = \sqrt{17} \Rightarrow \text{đpcm}$$

Bài 4: Xét $f(x) = x^n + (1-x)^n$ trên $[0, 1]$

$$\text{Ta được } \text{Min } f(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow f(a) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\text{Do đó: } a^n + b^n \geq \frac{1}{2^{n-1}}$$

Bài 5: $f'(x) = \frac{x^2 - 2x + m^2 - 3m + 3}{(x-1)^2}$

điều kiện để có CĐ, CT là: $1 < m < 2$

$$y_{CD} \cdot y_{CT} = (2x_1 - m - 1)(2x_2 - m - 1)$$

$$= 4x_1x_2 - 2(m+1)(x_1 + x_2) + (m+1)^2$$

$$= 5m^2 - 14m + 9 = f(m)$$

Khi $m = \frac{7}{5}$ thì $y_{CD} \cdot y_{CT}$ đạt giá trị nhỏ nhất

V. Tính lồi lõm – Điểm uốn

5.1 Tóm tắt lý thuyết:

Định lý 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trong (a, b)

Nếu $f''(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b)$ thì đồ thị hàm số trên lồi trên (a, b)

Nếu $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$ thì đồ thị hàm số trên lõm trên (a, b)

Định lý 2: Cho hàm số f liên tục trong 1 lân cận của x_0 và có đạo hàm cấp 2 trong lân cận đó (có thể tại x_0 không có đạo hàm cấp 2). Nếu đạo hàm cấp 2 đổi dấu khi qua x_0 thì $(x_0, f(x_0))$ là điểm uốn của đồ thị $y = f(x)$

5.2. Các áp dụng cơ bản:

1) *Khảo sát tính lồi – lõm – Tìm điểm uốn*

PP : Tính $f''(x)$

Xét dấu $y''(x)$ rồi áp dụng các định lí 1,2 để suy ra kết quả.

2) *Tìm điều kiện của tham số để hàm số lồi, lõm trên miền D.*

PP : Tính $f''(x)$

Áp dụng phương pháp tìm tham số để tam thức, nhị thức không đổi dấu trên miền D.

3) *Tìm tham số để hàm số nhận điểm $M(x_0, y_0)$ cho trước làm điểm uốn*

PP: Tìm điều kiện cần: $f''(x_0) = 0$. Giải tìm tham số.

Kiểm tra lại điều kiện đủ.

5.3. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Khảo sát tính lồi – lõm và tìm điểm uốn (nếu có) của các hàm số sau;

a) $y = x^4 + x^3 - 18x^2 + 24x - 12$

b) $y = x + x^{5/3}$

c) $y = \frac{x^2 + x + 1}{x}$

d) $y = \ln(x^2 - 1)$

e) $y = x \sin(\ln x)$

f) $y = 2 - |x^5 - 1|$.

Hướng dẫn giải:

a) $y' = 4x^3 + 3x^2 - 36x + 24$

$$y'' = 12\left(x^2 + \frac{x}{2} - 3\right); y'' = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = \frac{3}{2}.$$

Hàm số lõm trong $(-\infty, -2) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$.

Hàm số lồi trong $(-2, \frac{3}{2})$.

Điểm uốn: $(-2, -124)$ và $(\frac{3}{2}, -129)$.

b) $y' = 1 + \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}, y'' = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}}$ Hàm số lồi trong $(-\infty, 0)$, lõm trong $(0, \infty)$,
điểm uốn $(0, 0)$.

c) $y' = \frac{x^2 - 1}{x^2} \Rightarrow y'' = \frac{2}{x^3}$.

Hàm số lồi trong $(-\infty, 0)$, lõm trên $(0, \infty)$.

d) $y' = \frac{2x}{x^2 - 1} \Rightarrow y'' = \frac{2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Đồ thị hàm số luôn luôn lồi.

e) $y' = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$

$$y'' = \frac{1}{x} [\cos(\ln x) - \sin(\ln x)] = \frac{\sqrt{2}}{x} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \ln x\right).$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = e^{\frac{\pi}{4} + k\pi}$$

Hàm số lõm trong $\left(e^{\frac{-2\pi}{4} + k2\pi}, e^{\frac{\pi}{4} + k2\pi}\right)$.

Hàm số lồi trong $\left(e^{\frac{\pi}{4} + k2\pi}, e^{\frac{5\pi}{4} + k2\pi}\right)$

Điểm uốn $\left(e^{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}\right)$.

f) $y = \begin{cases} 3 - x^5 & \text{khi } x \geq 1 \\ 1 + x^5 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

$$y'' = \begin{cases} -20x^3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 20x^3 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

Hàm số lồi trong $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ lõm trong $(0, 1)$. Điểm uốn $(0, 1), (1, 2)$.

Bài 2: Cho hàm số: $y = (m - 1)x^4 + x^3 - (m + 1)x^2 - 3$. Tìm m để hàm số luôn luôn lồi.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $f'(x) = 4(m-1)x^3 + 3x^2 - 2(m+1)x$

$$f''(x) = 12(m-1)x^2 + 6x - 2(m+1).$$

Để hàm số luôn luôn lồi ta phải có: $f'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1 < 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{5}{8}} < m < \sqrt{\frac{5}{8}}.$$

Bài 3: Cho hàm số: $y = ax^3 + bx^2$. Tính a, b để hàm số nhận A (1, 3) làm điểm uốn

Hướng dẫn giải:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx, f''(x) = 6ax + 2b.$$

$$A \text{ là điểm uốn} \Rightarrow f''(1) = 0 \Leftrightarrow 6a + b = 0.$$

$$A \text{ ở trên đồ thị} \Leftrightarrow 3 = a + b.$$

$$\text{Giải hệ} \Rightarrow a = -\frac{3}{4}, b = \frac{9}{2}.$$

$$\text{Thử lại thì } y = -\frac{3}{4}x^3 + \frac{9}{2}x^2 \text{ nhận } A(1,2) \text{ làm điểm uốn.}$$

Bài 4:

a) Tìm a để hàm số: $y = x^4 + ax^2 + 1$ có 2 điểm uốn.

b) Cho hàm số $y = x(x-a)(x-b)$. Tìm hệ thức giữa a và b để đồ thị có điểm uốn ở trên đường cong $y = x^3$.

Hướng dẫn giải:

a) Ta có: $y' = 4x^3 + 2ax, y'' = 12x^2 + 2a$.

Để hàm số có 2 điểm uốn thì y'' đổi dấu 2 lần, $y'' = 0$ có 2 nghiệm $\Leftrightarrow a < 0$.

b) $y' = 3x^2 - 2(a+b)x + ab$

$$y'' = 6x - 2(a+b) \Rightarrow y'' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a+b}{3}$$

$$\Rightarrow y = \left(\frac{a+b}{3}\right)\left(\frac{b-2a}{3}\right)\left(\frac{a-2b}{3}\right)$$

Để điểm uốn ở trên đường cong $y = x^3$ thì phải có

$$\Rightarrow \left(\frac{a+b}{3}\right)^3 = \left(\frac{a+b}{3}\right)\left(\frac{b-2a}{3}\right)\left(\frac{a-2b}{3}\right) \Leftrightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2) = 0 \Leftrightarrow a+b=0.$$

Vậy: khi $a = -b$ thì hàm số có điểm uốn trên $y = x^3$.

Bài 5: Chứng minh rằng đồ thị các hàm số sau đây có 3 điểm uốn thẳng hàng.

a) $y = \frac{x-1}{x^2+1}$

b) $y = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

Hướng dẫn giải:

a) $y' = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow y'' = \frac{2(x^3 + 3x^2 - 3x - 1)}{(x^2 + 1)^3}$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = 2 - \sqrt{3}, x_3 = -2 + \sqrt{3}$$

Hàm số có 3 điểm uốn $A(1,1), B(-2 - \sqrt{3}, \frac{1-\sqrt{3}}{4}), C(-2 + \sqrt{3}, \frac{1+\sqrt{3}}{4})$

$$\overrightarrow{AB} = \left(-3 - \sqrt{3}, -\frac{3 - \sqrt{3}}{4}\right), \overrightarrow{BC} = \left(2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB} // \overrightarrow{BC} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

b) $y'' = \frac{2(2x+1)(x^2+x-2)}{(x^2+x+1)^2}, y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}, x = 1, x = -2.$

Đồ thị có 3 điểm uốn $A(-2, -1), B(-\frac{1}{2}, 0), C(1, 1).$

$$\overrightarrow{AC} = (3, 2), \overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}, 1 \Rightarrow \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{BC} \Rightarrow A, B, C \text{ thẳng hàng.}$$

5.4. Bài tập Tự Luyện:

Bài 1: Khảo sát tính lồi lõm và tìm điểm uốn (nếu có) của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{(x+1)^3}$ b) $y = \frac{2x}{3-4x^2}$ c) $y = x + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

d) $y = \ln(1+x^2)$ e) $y = x + \sin x$ f) $y = e^x \sin x.$

Bài 2: Tìm m để hàm số $y = x^4 + 2x^3 - mx^2 + 1$ luôn luôn lồi.

Bài 3:

a) Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$. Tìm điểm uốn và chứng minh điểm uốn là tâm đối xứng của đồ thị.

b) Chứng minh rằng nếu đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ cắt Ox tại A, B, C mà B là trung điểm AC thì B là điểm uốn của đồ thị.

Bài 4: Cho hàm số: $y = x^4 - mx^3 + (m-1)x^2 + x + 1$. Tìm m để hàm số lõm trên $(-1, 2)$.

Bài 5: Cho hàm số $y = x^3 + \frac{3x^2}{m} + 1$. Tìm m để đồ thị nhận $I(-1, 3)$ làm điểm uốn.

VI. Tiệm cận**6.1. Tóm tắt lý thuyết:**

$x = x_0$ là tiệm cận đứng $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$

$y = y_0$ là tiệm cận ngang $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = y_0$

$y = ax + b$ là tiệm cận xiên của $y = f(x) \Rightarrow \begin{cases} a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \\ b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) \end{cases}$

Nếu $f(x) = ax + b + \alpha(x)$ mà $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \alpha(x) = 0$ thì $y = ax + b$ là tiệm cận xiên.

6.2. Bài tập áp dụng :

Bài 1: Tìm các loại tiệm cận (nếu có) của các hàm số sau:

a) $y = \frac{x^2 - 2|x| + 2}{|x| - 1}$

b) $y = -2x + 3\sqrt{x^2 + 1}$

c) $y = x + \sqrt{4x^2 + 2x + 1}$

d) $y = \sqrt{1 + x^2} \sin \frac{1}{x}$

Hướng dẫn giải:

a) $\lim_{x \rightarrow \pm 1} y = \pm \infty \Rightarrow x = \pm 1$ là tiệm cận đứng. Vì $y = |x| - 1 + \frac{1}{|x| - 1}$ và

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1} \frac{1}{|x| - 1} = 0, \text{ do đó } y = |x| - 1 \text{ là tiệm cận xiên.}$$

Vậy hàm số có 2 tiệm cận đứng là $x = \pm 1$ và 2 tiệm cận xiên: $y = x - 1$, $y = -x - 1$.

b) $D_f = \mathbb{R}$: Hàm số không có tiệm cận đứng.

$$f(x) = -2x + 3|x| + \varepsilon(x) \text{ với } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \varepsilon(x) = 0.$$

Hàm số có 2 tiệm cận xiên: $y = x$ và $y = -5x$.

c) $y = x + 2\left|x + \frac{1}{4}\right| + \varepsilon(x)$ với $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \varepsilon(x) = 0$.

Do đó hàm số có 2 tiệm cận xiên: $y = 3x + \frac{1}{2}$, $y = -x - \frac{1}{2}$.

d) Để ý hàm số $y = \sqrt{1+x^2} \sin \frac{1}{x}$ bị chặn trong các lân cận của $x = 0$ nên

không có tiệm cận đứng.

Gọi $y = ax + b$ là tiệm cận xiên

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \sin \frac{1}{x}}{x} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \sqrt{1+x^2} \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \pm 1$$

Vậy hàm số có 2 tiệm cận ngang $y = \pm 1$.

Bài 2: Tìm các tiệm cận của các hàm số:

a) $y = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$ b) $y = x + \frac{\ln x}{x}$ c) $y = \ln \frac{x}{x^2 - 1}$ d) $y = x + \frac{\sin x}{x}$.

Hướng dẫn giải:

a) Hàm số không có tiệm cận đứng, tiệm cận ngang

Gọi $y = ax + b$ là tiệm cận xiên

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = -1, b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt[3]{3x^2 - x^3} + x)$$

$$b = 1$$

Vậy tiệm cận xiên là $y = -x + 1$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{\ln x}{x} \right) = \infty \Rightarrow x = 0$ là tiệm cận đứng.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{\ln x}{x} \right) = \infty : \text{hàm số không có tiệm cận ngang.}$$

c) $\lim_{x \rightarrow \pm 1} \frac{x}{x^2 - 1} = \infty \Rightarrow x = \pm 1$ là các tiệm cận đứng.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x}{x^2 - 1} = \infty : \text{Hàm số không có tiệm cận ngang.}$$

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{x}{x^2 - 1} \right) = 0 : \text{Hàm số không có tiệm cận xiên.}$$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x + \frac{\sin x}{x} \right) = 0 + 1 = 1 \Rightarrow$ Hàm số không có tiệm cận đứng.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x + \frac{\sin x}{x} - x \right) = 0 \Rightarrow y = x \text{ là tiệm cận xiên.}$$

Bài 3: Biện luận theo m các loại tiệm cận của các hàm số sau:

a) $y = \frac{x+2}{x^2 - 4x + m}$

b) $y = \frac{mx^3 + 1}{x^2 - 3x + 2}$

Hướng dẫn giải:

a) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Xét } \Delta' = 4 - m.$$

Nếu: $m > 4$: $\Delta' < 0$: Hàm số không có tiệm cận đứng.

Nếu: $m = 4$: $f(x) = \frac{x+2}{(x-2)^2}$: Hàm số có tiệm cận đứng $x = 2$.

Nếu: $m < 4, m \neq -12$ thì hàm số có 2 tiệm cận đứng là: $x = 2 \pm \sqrt{4 - m}$.

Nếu $m = -12$ hàm số trở thành: $y = \frac{1}{x-6}$:

Hàm số có tiệm cận đứng $x = 6$.

b) Nếu $m = 0$ thì $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ có tiệm cận đứng $x = 1, x = 2$ và tiệm cận ngang $y = 0$.

Nếu $m \neq 0$ thì $f(x) = mx + 3m - \frac{7mx - 6m - 1}{x^2 - 3x + 2}$, do đó: $y = mx + 3m$ là tiệm cận xiên.

Nếu $m = 1$ hàm số trở thành: $y = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x^2 + x + 1}{x - 2}$ có tiệm cận đứng là $x = 2$.

Nếu $m = \frac{1}{8}$: Hàm số trở thành: $y = \frac{x^2 + 2x + 4}{8(x - 1)}$ có tiệm cận đứng là $x = 1$.

Nếu $m \neq 0, m \neq 1$ và $m \neq \frac{1}{8}$ thì hàm số có 2 tiệm cận đứng là: $x = 1, x = 2$.

Bài 4: Cho hàm số: $y = 2x - 1 + m\sqrt{x^2 - 2x + 3}$. Tìm m để:

a) Đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang và 1 tiệm cận xiên.

b) Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận xiên.

Hướng dẫn giải:

$$y = 2x - 1 + m\sqrt{(x - 1)^2 + 2} = 2x - 1 + m|x - 1| + \varepsilon(x).$$

. $m = 0$: $y = 2x - 1$: Hàm số không có tiệm cận.

. $m \neq 0$: $y = 2x - 1 + m|x - 1| = \begin{cases} (2 - m)x + m - 1 \\ (2 + m)x - m - 1 \end{cases}$ là tiệm cận xiên.

Do đó: khi $m = 2$ hoặc $m = -2$ thì hàm số có 1 tiệm cận ngang: $y = 1$ và tiệm cận xiên $y = 4x - 3$.

. Khi $m \neq 0, m \neq 2, m \neq -2$ thì hàm số có 2 tiệm cận xiên

$$y = (2 - m)x + m - 1 \text{ và } y = (2 + m)x - m - 1.$$

6.3. Bài tập tự luyện :

Bài 1: Tìm các tiệm cận của các đồ thị hàm số sau:

a) $y = \frac{x - 1}{x + 1}$

b) $y = \frac{x}{x^2 - 9}$

c) $y = \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3}$

$$d) y = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x} \quad e) y = x + \sqrt{2x^2 + 1}$$

Bài 2: Biện luận theo m các tiệm cận của đồ thị hàm số sau:

$$a) y = \frac{mx^2 + 6x - 2}{x + 2}$$

$$b) y = \frac{x^2 + mx + 1}{x - 1}$$

Bài 3: Cho hàm số: $y = \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 2}$. Chứng minh rằng tích khoảng cách từ 1 điểm tùy ý trên đồ thị đến 2 tiệm cận bằng 1 hằng số.

Bài 4: Cho hàm số: $y = \frac{(m + 2)x^2 + (3 - 4m)x - 2m}{x - m}$.

Chứng minh khi m thay đổi các tiệm cận xiên luôn luôn tiếp xúc 1 parabol cố định.

Bài 5: Tìm m để:

$$a) y = \frac{x^2 - 2mx + 3}{x^2 - 1} \text{ có 2 tiệm cận đứng.}$$

$$b) y = \frac{x^2 + (m + 1)x - (m + 1)}{x - m} \text{ không có tiệm cận xiên.}$$

$$c) y = \frac{x^3}{x^2 - mx + m} \text{ có 2 tiệm cận đứng.}$$

6.4. Hướng Dẫn –Đáp Số:

Bài 1:

$$d) \text{ Tiệm cận ngang: } y = \pm 1.$$

$$e) \text{ Tiệm cận xiên: } y = (1 \pm \sqrt{2}x).$$

Bài 2:

$$a) \cdot m = \frac{7}{2}: \text{ Không có tiệm cận.}$$

$$\cdot m \neq \frac{7}{2}: x = 2 \text{ là tiệm cận đứng.}$$

$$\cdot m \neq 0: y = mx + 6 - 2m \text{ là tiệm cận xiên.}$$

$$\cdot m = 0: x = -2 \text{ là tiệm cận đứng.}$$

$y = 6$ là tiệm cận ngang.

b) $m = -2$: không có tiệm cận.

$m \neq -2$: $x = 1$ là tiệm cận đứng.

$Y = x + m + 1$ là tiệm cận xiên.

Bài 3: Tiệm cận đứng: $x - 2 = 0$.

Tiệm cận xiên: $x - y + 5 = 0$.

$$d_1 d_2 = \frac{9\sqrt{2}}{2}.$$

Bài 4: Phương trình tiệm cận xiên: $y = (m + 2)x + m^2 - 2m + 3$.

Gọi $y = ax^2 + bx + c$ là (P). Lập điều kiện tiếp xúc.

$$\text{Đưa về hệ: } \begin{cases} 1 + 4a = 0 \\ 4 - 2b - 8a = 0 \\ b^2 + 4 - 4b - 4ac + 12a = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{-1}{4}, b = 3, c = 2.$$

Bài 5:

$$\text{a) } m \neq \pm 1 \quad \text{b) } m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{c) } m < 0 \vee m > 4.$$

B. Trắc nghiệm về ứng dụng của đạo hàm

Câu 1: Hệ số c trong định lí Lagrange của hàm số $y = \ln x$ trên $[1, e]$ là:

$$\text{A. } c = e - 1 \quad \text{B. } c = \frac{1}{e - 1} \quad \text{C. } c = \frac{1}{e} \quad \text{D. } c = e.$$

Câu 2: Cho hàm số $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Trị số c trong định lí Lagrange của hàm số trên $[a, b]$ là:

$$\text{A. } \frac{a - b}{2} \quad \text{B. } \frac{a + b}{2} \quad \text{C. } \frac{a}{a + b} \quad \text{D. } \frac{b}{a + b}.$$

Câu 3: Cho hàm số $y = x^2 - 2x$. Trị số c trong định lí Lagrange trên $[0, 3]$ là:

$$\text{A. } c = \frac{2}{3} \quad \text{B. } c = \frac{3}{2} \quad \text{C. } c = 2 \quad \text{D. } c = 3.$$

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 2$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. Hàm số tăng trên $(-\infty, 2) \cup (4, \infty)$ và giảm trên $(2, 4)$.
- B. Hàm số giảm trên $(-\infty, 2) \cup (4, \infty)$ và tăng trên $(2, 4)$.
- C. Hàm số luôn luôn tăng.
- D. Hàm số luôn luôn giảm.

Câu 5: Cho hàm số: $y = \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$. Xét các mệnh đề:

- A. Hàm số trên là hàm số lẻ.
- B. Hàm số luôn luôn tăng trên miền xác định.
- C. Hàm số luôn luôn giảm trên miền xác định.
- D. Hàm số có miền xác định là: $D_y = \mathbb{R}$.

Hãy chọn mệnh đề đúng.

Câu 6: Cho hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + m - 2$

Để hàm số luôn luôn tăng (đồng biến) thì giá trị của m là:

- A. $m = -1$
- B. $|m| > 1$
- C. $m = 0$
- D. $|m| < 1$.

Bài 7: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2(m+1)x^2 - (2m+1)x + m$. Để hàm số giảm

(nghịch biến) trên $(1, 2)$ thì giá trị của m là:

- A. $m > -\frac{2}{3}$
- B. $m < -\frac{2}{3}$ hay $m > -\frac{1}{2}$
- C. $-\frac{2}{3} < m < -\frac{1}{2}$
- D. $m \geq -\frac{1}{2}$.

Câu 8: Để hàm số $y = x + m \sin x$ luôn luôn đồng biến (tăng) trên $\mathbb{R}$ thì giá trị của m là:

- A. $|m| > 1$
- B. $|m| \leq 1$
- C. $m > 2$
- D. $0 < m < 2$.

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + 6x - 2}{x + 2}$. Để hàm số luôn luôn đồng biến

(tăng) trên tập xác định thì giá trị của m là:

- A. $m \leq 0$
- B. $m \geq \frac{7}{2}$
- C. $0 < m < \frac{7}{2}$
- D. $0 \leq m \leq \frac{7}{2}$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = x^2 e^{-x}$. Hàm số đồng biến (tăng) trên miền nào dưới đây:

- A. $(-\infty, 0)$ B. $(0, \infty)$ C. $(0, 2)$ D. $(2, \infty)$.

Câu 11: Cho hàm số: $y = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$. Mệnh đề nào dưới đây là sai

- A. Hàm số có đạo hàm: $f'(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.
 B. Hàm số tăng trên $(0, \infty)$.
 C. Miền xác định của hàm số là $D_f = \mathbb{R}$.
 D. Hàm số giảm trên $(0, \infty)$.

Câu 12: Cho hàm số $y = \frac{x}{\ln x}$. Hãy chọn mệnh đề đúng dưới đây

- A. Hàm số luôn luôn tăng trên $(0, \infty)$.
 B. Hàm số tăng trên $(0, e)$ và giảm trên (e, ∞) .
 C. Hàm số giảm trên $(0, 1)$ và tăng trên $(1, \infty)$.
 D. Hàm số giảm trên $(0, 1) \cup (1, e)$ và tăng trên (e, ∞) .

Câu 13: Cho hàm số: $y = x^3(1-x)^2$. Số điểm cực trị của hàm số là:

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 4.

Câu 14: Cho hàm số: $y = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 1$. Điểm nào dưới đây là điểm cực đại của hàm số

- A. $(-1, -8)$ B. $(2, 19)$ C. $(1, 12)$ D. $(0, -1)$.

Câu 15: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(2a+1)x^2 + 6a(a+1)x + 2$. Nếu gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ các điểm cực trị của hàm số thì giá trị $|x_1 - x_2|$ là:

- A. a B. 1 C. 2 D. $|a-1|$.

Câu 16: Cho hàm số: $y = \frac{x^2 - ax + b}{x-1}$. Để hàm số đạt cực đại tại điểm $A(0, -1)$ thì giá trị của a và b là:

- A. $a = b = 1$ B. $a = 1, b = -1$ C. $a = b = -1$ D. $a = -1, b = 1$.

Câu 17: Cho hàm số $y = x + m - 1 + \frac{1}{x+m}$. Để hàm số có 2 điểm cực trị có hoành độ đều thuộc khoảng $(-4, 0)$ thì giá trị của m là:

- A. $1 < m < 3$ B. $m < 1$ C. $m > 3$ D. $m < 1$ v $m > 3$

Câu 18: Để hàm số $y = a \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$ đạt cực trị tại $x = \frac{\pi}{3}$ thì giá trị của a là:

- A. $a = \frac{1}{2}$ B. $a = 2$ C. $a = 1$ D. $a = -1$.

Câu 19: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + m - 2}{x + 2}$. Khi m thay đổi thì các điểm cực trị di động trên đường thẳng nào dưới đây:

- A. $y = 2x$ B. $y = 2x + 3$ C. $y = -2x$ D. $y = -2x + 3$.

Bài 20: Cho hàm số $y = (m - 2)x^3 - mx + 2$. Để đồ thị hàm số không có điểm cực trị thì giá trị của m là:

- A. $m > 0$ và $m \neq 2$ B. $m \geq 2$
C. $0 \leq m \leq 2$ D. $m \leq 0$.

Câu 21: Để hàm số: $y = \frac{x^2 - mx}{x^2 - x + 1}$ chỉ có 1 điểm cực trị thì giá trị m là:

- A. Với mọi giá trị $m \in \mathbb{R}$ B. $m = -1$
C. $m = 1$ D. $m = 0$.

Câu 22: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(m^2 + 1)x^2 + (3m - 2)x + m$. Để hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ thì giá trị của m là:

- A. $m = 1$ B. $m = -1$ C. $m = 2$ D. $m = -2$.

Câu 23: Cho hàm số: $y = 2 \cos x + \cos 2x$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng

- A. Hàm số không có điểm cực trị.
B. Hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{2\pi}{3}$.
C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{2\pi}{3}$.
D. Điểm có hoành độ $x = \frac{2\pi}{3}$ không phải là điểm cực trị.

Câu 24: Cho hàm số: $y = 2 \sin(x + \frac{\pi}{6}) + x$. Hàm số đạt cực đại tại điểm có hoành độ nào dưới đây:

A. $\frac{\pi}{2} + k2\pi$ B. $-\frac{\pi}{2} + k2\pi$ C. $\frac{\pi}{6} + k2\pi$ D. $-\frac{\pi}{6} + k2\pi$.

Câu 25: Cho hàm số $y = e^{-2x^2+4x}$. Hãy chọn mệnh đề đúng dưới đây :

- A. Điểm $(1, e^2)$ là điểm cực tiểu B. Điểm $(1, e^2)$ là điểm cực đại
C. Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị D. Điểm $(0,1)$ là một điểm cực trị.

Câu 26: Cho hàm số: $y = \frac{e^x}{1+x}$. Hãy chọn mệnh đề đúng dưới đây :

- A. Đạo hàm $y' = \frac{e^x}{(1+x)^2}$ B. Hàm số đạt cực đại tại $(0,1)$
C. Hàm số đạt cực tiểu tại $(0,1)$ D. Hàm số tăng trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Câu 27. Cho hàm số: $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-4,4]$ là số nào dưới đây :

- A. 40 B. 8 C. 27 D. 37.

Câu 28: Cho hàm số $y = x.e^{-x}$. Với $x \in [0, \infty)$. Hãy chọn mệnh đề đúng :

- A. $\text{Max} f(x) = \frac{1}{e}; \text{Min} f(x) = \frac{-1}{e}$.
B. $\text{Max} f(x) = \frac{1}{e}$; không có $\text{Min} f(x)$.
C. $\text{Max} f(x) = \frac{1}{e}; \text{Min} f(x) = 0$.
D. $\text{Min} f(x) = \frac{1}{e}$; không có $\text{Max} f(x)$.

Câu 29: Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$. Hãy chọn mệnh đề sai dưới đây:

- A. Miền xác định là $D_f = \mathbb{R}$.
B. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là $m = 2$.
C. Giá trị lớn nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ không tồn tại.
D. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0,2]$ là $\sqrt{5}$.

Câu 30: Miền giá trị của hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$ là:

A. $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$

B. $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$

C. $\left[-\infty, \frac{1}{3}\right]$

D. $[3, \infty]$.

Câu 31: Cho hàm số $y = \frac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 1}$. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của

hàm số trên $\mathbb{R}$ lần lượt là :

A. $M = 4, m = 0$

B. $M = 2, m = 0$

C. $M = 6, m = 1$

D. $M = 6, m = 2$.

Câu 32: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x^2+x-1}$. Số điểm uốn của đồ thị hàm số trên là:

A. 1

B. 2

C. 3

D. 0.

Câu 33: Cho hàm số $y = x + \ln x$. Hãy chọn mệnh đề đúng :

A. Hàm số đạt cực trị tại $x = 1$.

B. Hàm số có 1 điểm uốn.

C. Đồ thị hàm số luôn luôn lồi trên $(0, \infty)$.

D. Đồ thị hàm số luôn luôn lõm trên $(0, \infty)$.

Câu 34: Cho $f(x) = x^3 - ax^2 + x + b$. Để đồ thị nhận $I(1,1)$ làm điểm uốn thì giá trị của a, b là:

A. $a = 3, b = 1$

B. $a = 3, b = 2$

C. $a = 2, b = -6$

D. $a = -3, b = 2$.

Câu 35: Cho hàm số $y = (m-1)x^4 + x^3 - (m+1)x^3 - 3$. Để hàm số luôn luôn lồi thì giá trị của m là:

A. $m < -\sqrt{\frac{5}{8}}$

B. $m > \sqrt{\frac{5}{8}}$

C. $|m| < \sqrt{\frac{5}{8}}$

D. $m < 1$.

Câu 36: Cho hàm số: $y = x + \sqrt{x^2 + 2x + 5}$. Xét các mệnh đề:

I: Đồ thị nhận đường $y = 2x + 1$ là tiệm cận xiên.

II: Đồ thị nhận đường thẳng $y = -1$ là tiệm cận ngang.

III: Đồ thị hàm số đạt cực đại tại điểm có hoành độ $x = -1$.

Hãy chọn mệnh đề đúng

A. Chỉ I đúng

B. Chỉ II đúng

C. I và II đều đúng

D. I và III đúng.

Câu 37: Cho hàm số $y = \frac{mx^3 + 3mx + 2m + 1}{x + 2}$. Tiệm cận xiên của đồ thị

hàm số đi qua điểm nào dưới đây:

- A. $(0, -1)$ B. $(-1, 0)$ C. $(1, -1)$ D. $(-1, 1)$.

Câu 38: Cho hàm số: $y = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$. Xét các mệnh đề:

(I) Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang là $y = 1$ và $y = -1$.

(II): Hàm số chỉ có 1 điểm cực đại là $\left(\frac{1}{3}, \sqrt{10}\right)$.

(III): Giá trị lớn nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là $\sqrt{10}$.

Mệnh đề nào đúng:

- A. Chỉ I đúng B. Chỉ II đúng C. Chỉ III đúng D. I, II, III đều đúng.

Câu 39: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x^2+x-1}$. Hãy chọn mệnh đề đúng dưới đây:

A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận nào.

B. Đồ thị hàm số luôn luôn lồi.

C. Hàm số có 2 điểm cực trị.

D. Đồ thị hàm số nhận đường $y = 2$ làm tiệm cận.

Câu 40: Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + m(m+2)x + 2m^2 + 1}{x+2}$. Để hàm số không có

tiệm cận xiên thì giá trị của m là:

- A. $m = 0$ B. $m = -2$ C. $m = 2$ D. $m = 1$.

C. Hướng dẫn giải trắc nghiệm về ứng dụng của đạo hàm

Câu 1: Giải $f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(c) = \frac{1}{c}$. Hệ số c trên $[1, e]$.

Thỏa $\frac{f(e) - f(1)}{e - 1} = f'(c) \Leftrightarrow \frac{1}{e - 1} = \frac{1}{c} \Rightarrow c = e - 1$. Chọn câu A.

Câu 2: $f'(x) = 2\alpha x + \beta \Rightarrow f'(c) = 2\alpha c + \beta$.

Giải phương trình: $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Leftrightarrow c = \frac{a + b}{2}$. Chọn câu B.

Câu 3: $f'(x) = 2x - 2 \Rightarrow f'(c) = 2c - 2$

Giải phương trình: $\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = f'(c) \Leftrightarrow c = \frac{3}{2}$. Chọn câu B.

Câu 4: $y' = x^2 - 6x + 8; y = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 4$. Chọn câu A.

Câu 5:

$$f(-x) = \ln(\sqrt{1+x^2} + x) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2} - x}\right) = -\ln(\sqrt{1+x^2} - x) = f(x)$$

hàm số $y = f(x)$ là lẻ.

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{hàm số luôn luôn giảm.}$$

$$\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x \Rightarrow \sqrt{1+x^2} - x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad D_y = \mathbb{R}.$$

Chọn câu B.

Câu 6: $y' = 3x^2 + 4mx = x(3x + 4m)$.

$$y' \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m = 0. \text{ Chọn câu C.}$$

Câu 7: $y' = x^2 - 4(m+1)x - (2m+1) = f(x)$

Để hàm số nghịch biến trên $(1, 2)$ thì phải có $x_1 \leq 1 \leq 2 \leq x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(1) \leq 0 \\ f(2) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow m \geq -\frac{1}{2}. \text{ Chọn câu D.}$$

Câu 8: $y' = 1 + m \cos x$

Khi $|m| \leq 1$ thì $y' \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Chọn câu B.

Câu 9: $y' = \frac{mx^2 + 4mx + 14}{(x+2)^2}$

$$m = 0: y' > 0 \quad \forall x \neq -2: \text{Hàm số đồng biến trên } \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$m \neq 0: \text{Để hàm số đồng biến trên } D \text{ thì phải có: } \begin{cases} m > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} (*)$$

$$\text{Giải } (*) \Rightarrow 0 < m \leq \frac{7}{2}. \text{ Kết hợp: } 0 \leq m \leq \frac{7}{2}. \text{ Chọn câu D.}$$

Câu 10: $f'(x) = e^{-x}(2x - x^2)$

Xét dấu: $-x^2 + 2x$ ta có: $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (0,2)$. Hàm số **tăng** trên $(0,2)$

Chọn câu C.

Câu 11: $x + \sqrt{1+x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

$x > 0 \Rightarrow x + \sqrt{1+x^2} > 1 \Rightarrow f'(x) > \ln 1 = 0$ Hàm số **tăng**. Vậy chỉ có D là sai. Chọn câu D.

Câu 12: $D_f = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$$y' = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}; y' = 0 \Leftrightarrow x = e. \text{ Chọn câu D.}$$

x	0	1	e	∞
y'	-	-	0	+
y	0	$-\infty$	∞	∞

Câu 13: $y' = x^2(1-x)(3-5x)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 1, x = \frac{3}{5}$. Hàm số có 2 điểm cực trị (tại $x = 1$ và $x = \frac{3}{5}$). Chọn câu B.

Câu 14: $y' = -6x^2 + 6x + 12, y' = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$.

$$y'' = -12x + 6; y''(2) = -18 < 0.$$

$(2,19)$ là điểm cực đại. Chọn câu B.

Câu 15: $y' = 6[x^2 - (2a+1)x + a(a+1)]$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x_1 = a, x_2 = a+1.$$

$$|x_1 - x_2| = 1. \text{ Chọn câu B.}$$

Câu 16: $y' = \frac{x^2 - 2x + a - b}{(x-1)^2}$

$$\text{Hàm số đạt cực trị tại } A(0, -1) \Rightarrow \begin{cases} y'(0) = 0 \Leftrightarrow a - b = 0 \\ f(0) = -1 \Leftrightarrow -b = -1 \end{cases}$$

Giải ta có: $a = b = 1$.

Kiểm tra điều kiện đủ thoả. Chọn câu A.

Câu 17: $y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x + m)^2}, y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2mx + m^2 - 1$

$$\Delta' = 1 \Rightarrow x_1 = -m - 1; x_2 = -m + 1$$

Để $x_1, x_2 \in (-4, 0)$ thì phải có: $-4 < -m - 1 < -m + 1 < 0$

$\Leftrightarrow 1 < m < 3$. Chọn câu A.

Câu 18: $y' = a \cos x + \cos 3x$

Điều kiện cần: $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow a = 2$.

Kiểm tra điều kiện đủ: y' đổi dấu khi qua $x = \frac{\pi}{3}$. Chọn câu B.

Câu 19: Đề ý rằng hàm số $y = \frac{u}{v}$ có tọa độ cực trị thoả

$$y_0 = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)} = 2x_0 + 3. \text{ Do đó các cực trị ở trên đường thẳng } y = 2x + 3.$$

Chọn câu B.

Câu 20: $y' = 3(m - 2)x^2 - m$. Để hàm số không có cực trị thì y' không đổi dấu, ta có 2 trường hợp:

+ $m \neq 2$: $y' = 0$: Vô nghiệm $\Leftrightarrow m(m - 2) \leq 0$ hoặc

+ $m = 2$: $y' = -2 < 0$: loại.

nghiệm kép $\Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2$

Câu 21: $y' = \frac{(m + 1)x^2 + 2x - m}{(x^2 - x + 1)^2}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow (m + 1)x^2 + 2x - m = 0$$

Để hàm số chỉ có 1 cực trị thì y' đổi dấu 1 lần

$$\Leftrightarrow m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1.$$

Câu 22: $y' = x^2 - (m^2 + 1)x + 3m - 2$

Điều kiện cần: $y'(1) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$

. $m = 1$ thì $x = 1$ là điểm cực tiểu: loại.

. $m = 2$ thì $x = 1$ là điểm cực đại: Chọn câu C.

Câu 23: $y' = -2 \sin x(1 + 2 \cos x)$

$$y'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0; y'' = -2(\cos x + 2 \cos 2x)$$

$$y''\left(\frac{2\pi}{3}\right) < 0 \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \text{ là điểm cực đại. Chọn câu B.}$$

Câu 24: $y' = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1 \quad y'' = -2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

Kiểm tra điều kiện: $x = x_0$ là hoành độ cực đại

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) < 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 = \frac{\pi}{2} + k2\pi \text{ (thỏa). Chọn câu A.}$$

Câu 25: $y' = (4 - 4x)e^{-2x^2 + 4x}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Hàm số đạt cực đại tại $(1, e^2)$.

Chọn câu B.

Câu 26: $f'(x) = \frac{x.e^x}{(x+1)^2}$. Hàm số đạt cực đại tại $(0, 1)$. Chọn câu B.

Câu 27: $y' = 3x^2 - 6x - 9$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 3$

$f(-1) = 40, f(3) = 8, f(4) = 27, f(-4) = 37$. Chọn câu A.

Câu 28: $y' = (1 - x)e^{-x}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Dựa vào bảng biến thiên ta có

$\text{Max } f(x) = \frac{1}{e}, \text{Min } f(x) = 0$. Chọn câu C.

x	0	1	∞
y'	+	0	-
y	0	$\frac{1}{e}$	0

Câu 29: $D_y = \mathbb{R}$

$$y' = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}; y' = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

. $\text{Min } f(x) = 2$ trên $\mathbb{R}$, không tồn tại $\text{Max } f(x)$.

. $f(0) = f(2) = \sqrt{5}, f(1) = 2$ nên $\sqrt{5}$ là $\text{Max } f(x)$ trên $[0,2]$. Chọn câu D.

x	$-\infty$	1	∞
y'	-	0	+
y	0	2	∞

Câu 30: $y' = \frac{-2(x^2-1)}{x^2-x+1}; y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1 \Rightarrow \text{Max } f(x) = 3, \text{Min } f(x) = \frac{1}{3}.$$

Miền giá trị là $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$. Chọn câu A.

Câu 31: $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow y = 1 \\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 6 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2, \text{ do đó } \text{Max } f(x) = 6.$$

$\text{min } f(x) = 1$ Chọn câu C.

Câu 32: $y'' = \frac{-2(2x+1)(-x^2-x+2)}{(x^2+x+1)^2}$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}, x = 1, x = -2.$$

Đồ thị có 3 điểm uốn. Chọn câu C.

Câu 33: $D_y = (0, \infty); y' = 1 + \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x > 0$: Hàm số không có cực trị.

$y'' = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \forall x \in (0, \infty)$: Đồ thị hàm số luôn luôn lõm trong $(0, \infty)$, không có điểm uốn. Chọn câu C.

Câu 34: $y' = 3x^2 - 2ax + 1; y'' = 6x - 2a.$

$$I(1,1) \text{ là điểm uốn} \Rightarrow \begin{cases} y''(1) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ 6 - 2a \end{cases} \Leftrightarrow a = 3, b = 2.$$

Chọn câu B.

Câu 35: $y' = 4(m-1)x^3 + 3x^2 - 2(m+1)x$

$$y'' = 12(m-1)x^2 + 6x - 2(m+1).$$

Đồ thị hàm số luôn luôn lồi thì phải có: $y'' < 0 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1 < 0 \\ \Delta' = 9 + 24(m^2 - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow |m| < \sqrt{\frac{5}{8}}. \text{ Chọn câu C.}$$

Câu 36: $D_y = \mathbb{R}$.

$$y = x + \sqrt{(x+1)^2 + 4} = x + |x+1| + p(x) \text{ với } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x) = 0$$

Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận: $y = 2x + 1$ phía $x \rightarrow +\infty$

$y = -1$ phía $x \rightarrow -\infty$

$$y' = 1 + \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 1}} > 0 : \text{Hàm số không có cực trị. Chọn câu C.}$$

Câu 37: $y = mx + m + \frac{1}{x+2}$ có tiệm cận xiên là $y = mx + m$. Thay toạ độ

vào đồ thị chọn được điểm B (Hoặc tìm điểm cố định của đường thẳng $y = mx + m$). Chọn câu B.

Câu 38: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}} = \pm 1 \Rightarrow y = \pm 1$ là tiệm cận ngang.

$$y' = \frac{1-3x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}, y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Điểm $\left(\frac{1}{3}, \sqrt{10}\right)$ là điểm cực đại.

$\text{Max } f(x) = \sqrt{10}$. Cả I, II, III đều đúng. Chọn câu D.

Câu 39: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+1}{x^2+x+1} = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang (A sai).

$$y' = \frac{-2x^2 - 2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow -2x^2 - 2x + 1 = 0$$

y' đổi dấu 2 lần $\Rightarrow$ Hàm số có 2 điểm cực trị (B đúng). Chọn câu B.

Câu 40: Khi $m = 0$ hàm số trở thành: $y = \frac{1}{x+2}$ không có tiệm cận xiên.

Khi $m \neq 0$: Hàm số không có tiệm cận xiên khi $x = -2$ là nghiệm của:

$$mx^2 + m(m+2)x + 2m^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m + m(m+2)(-2) + 2m^2 + 1 = 0, \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy khi $m = 0$ thì hàm số không có tiệm cận xiên. Chọn câu A.

§3 Vấn đề 3: Các vấn đề về khảo sát hàm số

A. Các dạng cơ bản

I. Khảo sát vẽ đồ thị – đồ thị chứa giá trị tuyệt đối

1.1 Tóm tắt lý thuyết:

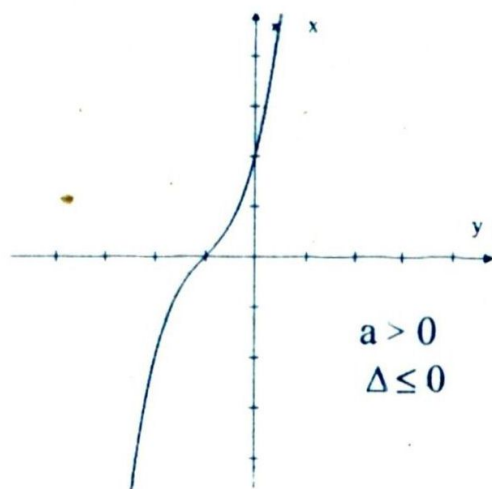
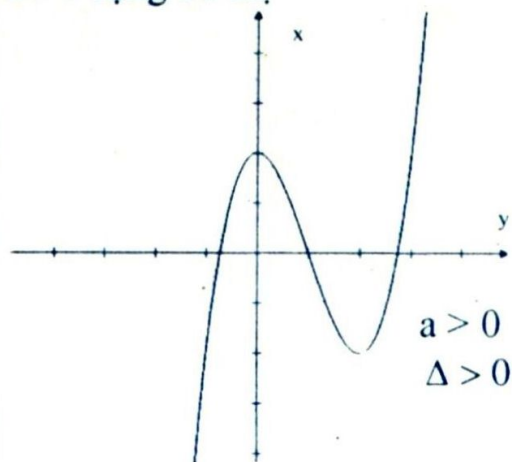
. Khảo sát hàm số: Thực hiện các bước :

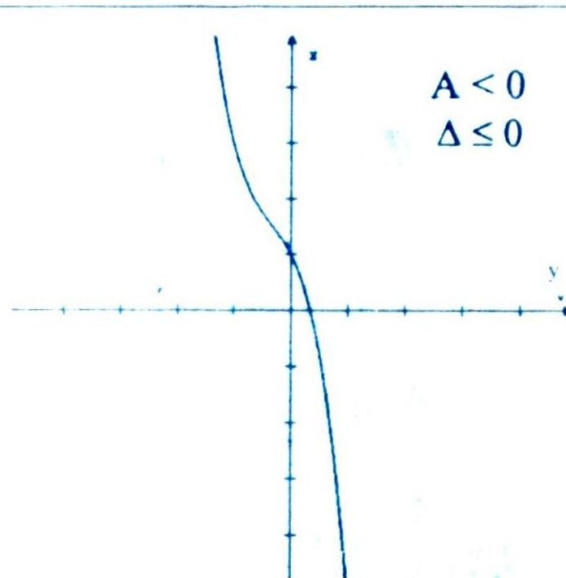
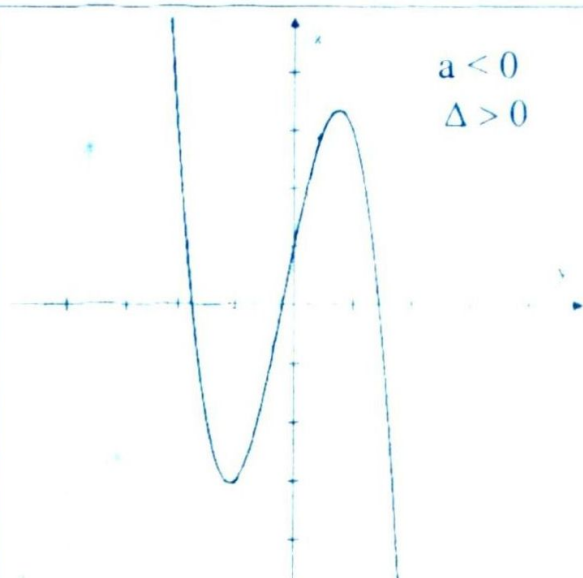
- Tìm miền xác định
- Khảo sát sự biến thiên: + Tính đạo hàm y'
 - + Tìm các điểm tới hạn
 - + Xét dấu y' suy ra chiều biến thiên hàm số
 - + Tìm các cực trị.
- Tính các giới hạn + Tìm các tiệm cận (nếu có)
- Xét tính lõm, điểm uốn
- Lập bảng biến thiên
- + Vẽ đồ thị.

❖ Đồ thị các hàm số cơ bản

a) **Hàm số bậc 3:** $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

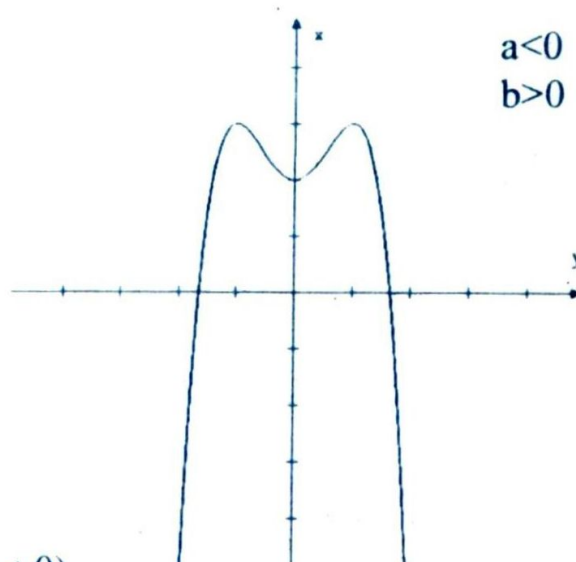
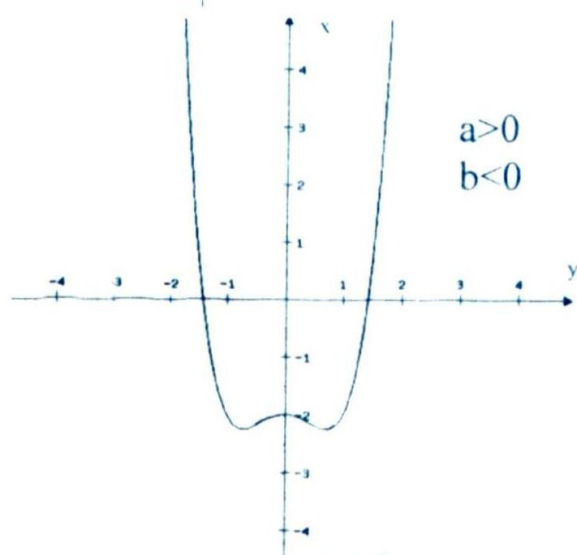
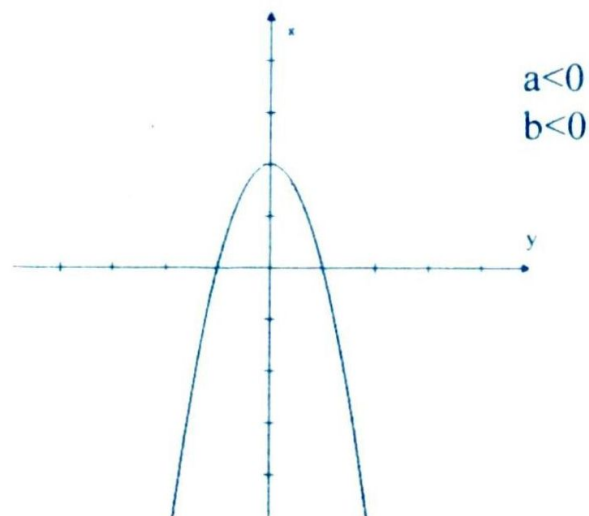
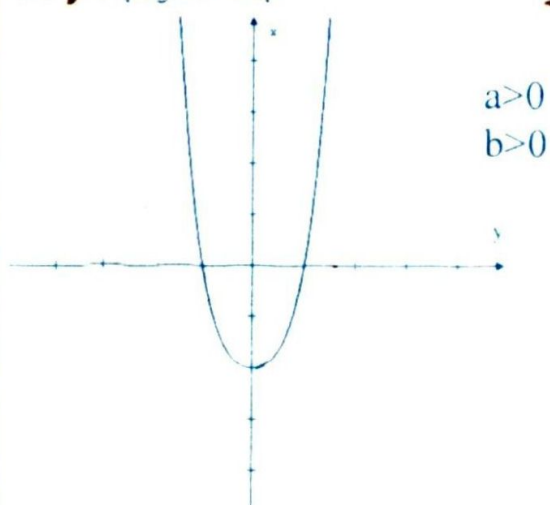
Có 4 dạng đồ thị





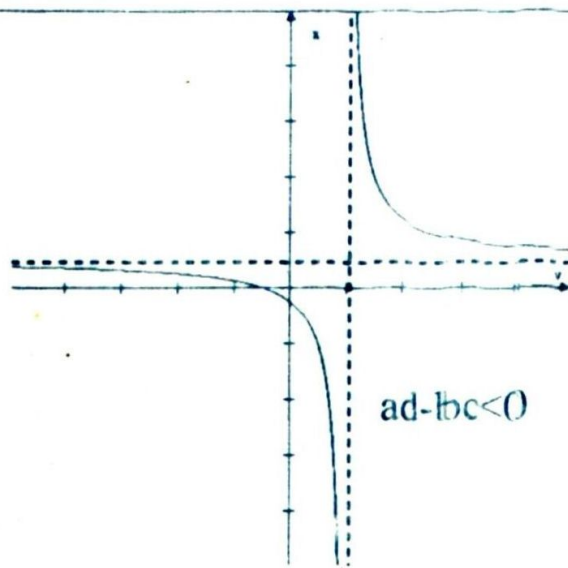
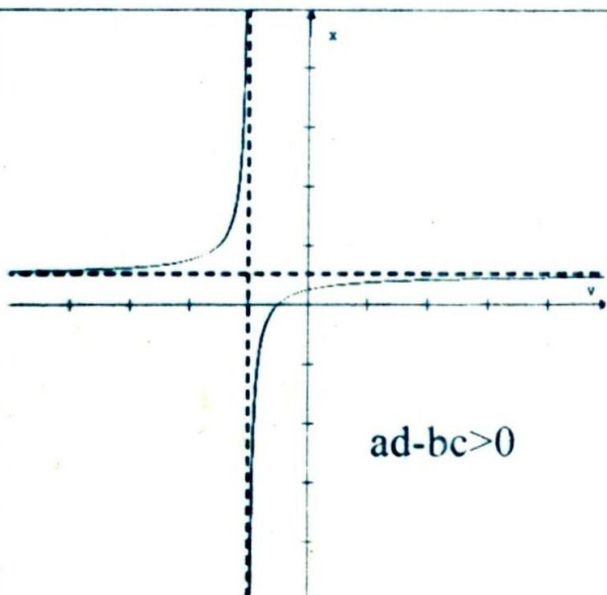
b) Hàm số trùng phương: $y = ax^4 + bx^2 + c (a \neq 0)$

Có 4 dạng đồ thị:



c. Hàm nhất biến: $y = \frac{ax+b}{cx+d} (ad - bc \neq 0)$

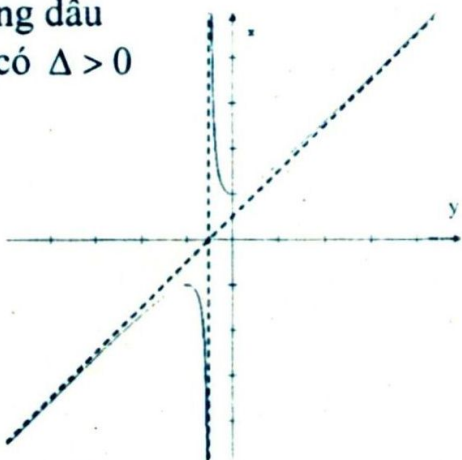
Có 2 dạng đồ thị:



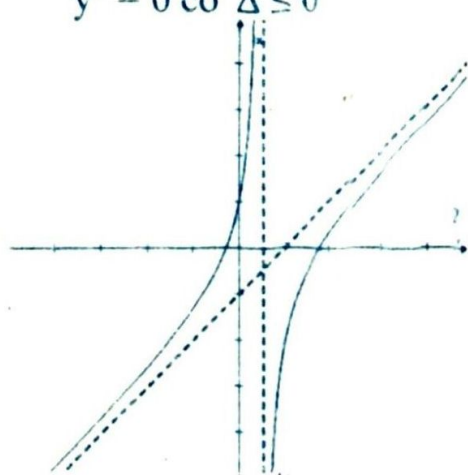
d. Hàm hữu tỷ: $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$

Có 4 dạng đồ thị:

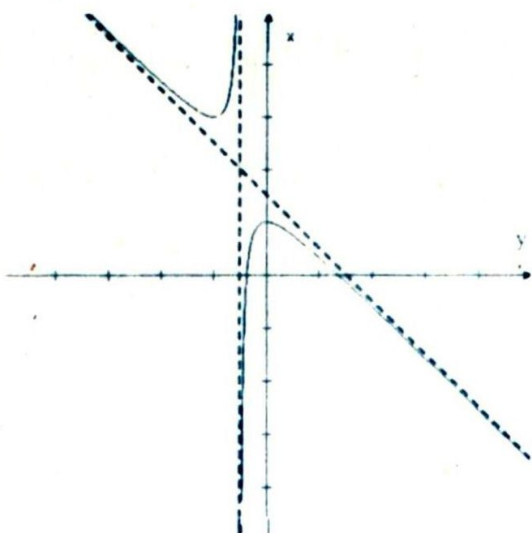
a, a' cùng dấu
 $y' = 0$ có $\Delta > 0$



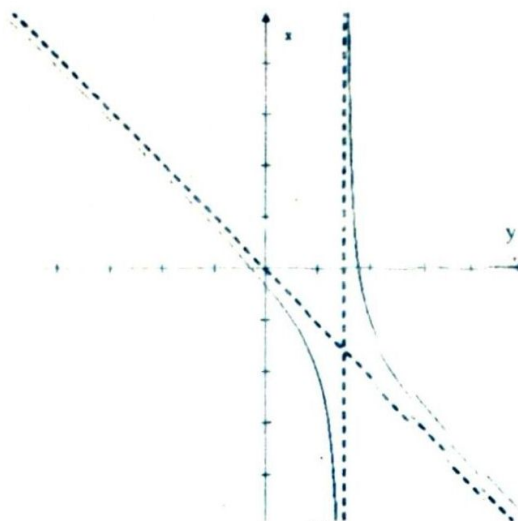
a, a' cùng dấu
 $y' = 0$ có $\Delta \leq 0$



a, a' trái dấu
 $y' = 0$ có $\Delta > 0$



a, a' trái dấu
 $y' = 0$ có $\Delta \leq 0$



❖ Đồ thị các hàm số có chứa giá trị tuyệt đối

PP. Để khảo sát vẽ đồ thị của hàm số có chứa giá trị tuyệt đối, ta xét dấu biểu thức trong giá trị tuyệt đối, viết hàm số thành nhiều công thức, khảo sát từng hàm số ứng với các công thức đó (trên từng miền thích hợp)

❖ Các dạng thường gặp

a) Dạng: $y = |f(x)|$

- Khảo sát vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$
- Suy ra đồ thị $y = |f(x)|$ bằng cách:
 - + Phần đồ thị ở dưới Ox giữ nguyên
 - + Phần đồ thị ở trên Ox thay bằng đối xứng qua Ox.

b) Dạng: $|y| = f(x)$

- Khảo sát vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$
- Suy ra đồ thị $|y| = f(x)$ bằng cách:
 - + Phần đồ thị ở trên Ox xoá đi
 - + Phần đồ thị ở dưới Ox vẽ thêm phần đối xứng qua Ox.

1.2. Bài Tập Áp Dụng:

Bài 1: Cho hàm số: $y = x^3 - 3ax^2 + 4a^3$.

- a) Với $a > 0$. Hãy khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trên.
- b) Tìm a để các điểm cực đại, cực tiểu của hàm số đối xứng nhau qua đường $y = x$.

Hướng dẫn giải:

a) $D_y = \mathbb{R}$

Sự biến thiên:

$$y' = 3x^2 - 6ax$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4a^3 \\ y = 0 \end{cases}. \text{Hàm số tăng trên } (-\infty, 0) \cup (2a, \infty), \text{hàm}$$

số giảm trên $(0, 2a)$ có CĐ $(0, 4a^3)$ và CT $(2a, 0)$.

Điểm uốn: $y'' = 6x - 6a$.

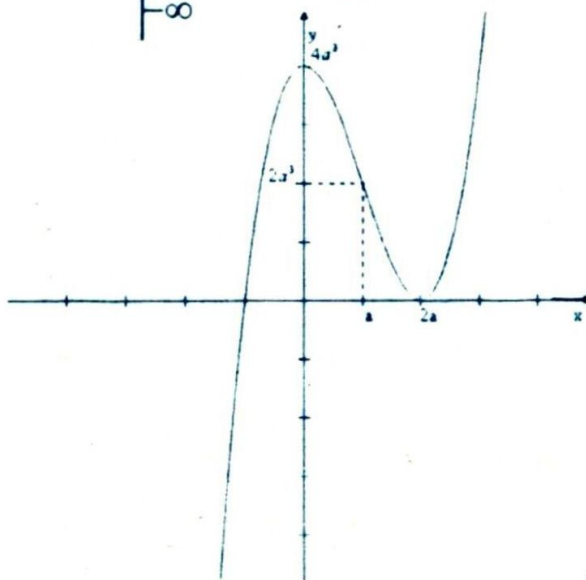
$y'' = 0 \Leftrightarrow x = a \Rightarrow y = 2a^3$: Hàm số lồi trên $(-\infty, a)$ lõm trên (a, ∞) .

Điểm uốn $(0, 2a^3)$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Hàm số không có tiệm cận

. Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	a	$2a$	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y''		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		CD $4a^3$	$2a^3$ 0 CT	$+\infty$

. Đồ thị



b) Ta có: CD $(0, 4a^3)$ và CT $(2a, 0)$.

Để hai điểm này đối xứng qua đường $y = x$ ta phải có:

$$2a = 4a^3 \Leftrightarrow a = 0 \vee a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(Điều kiện để có cực đại, cực tiểu là $a \neq 0$).

Bài 2: Khảo sát hàm số: $y = -x^3 + 3x^2 - 5x + 2$.

Hướng dẫn giải:

. $D_y = \mathbb{R}$

. $y' = -3x^2 + 6x - 5, \forall x \in \mathbb{R}$: Hàm số luôn luôn giảm, không có cực trị.

. $y'' = -6x + 6$

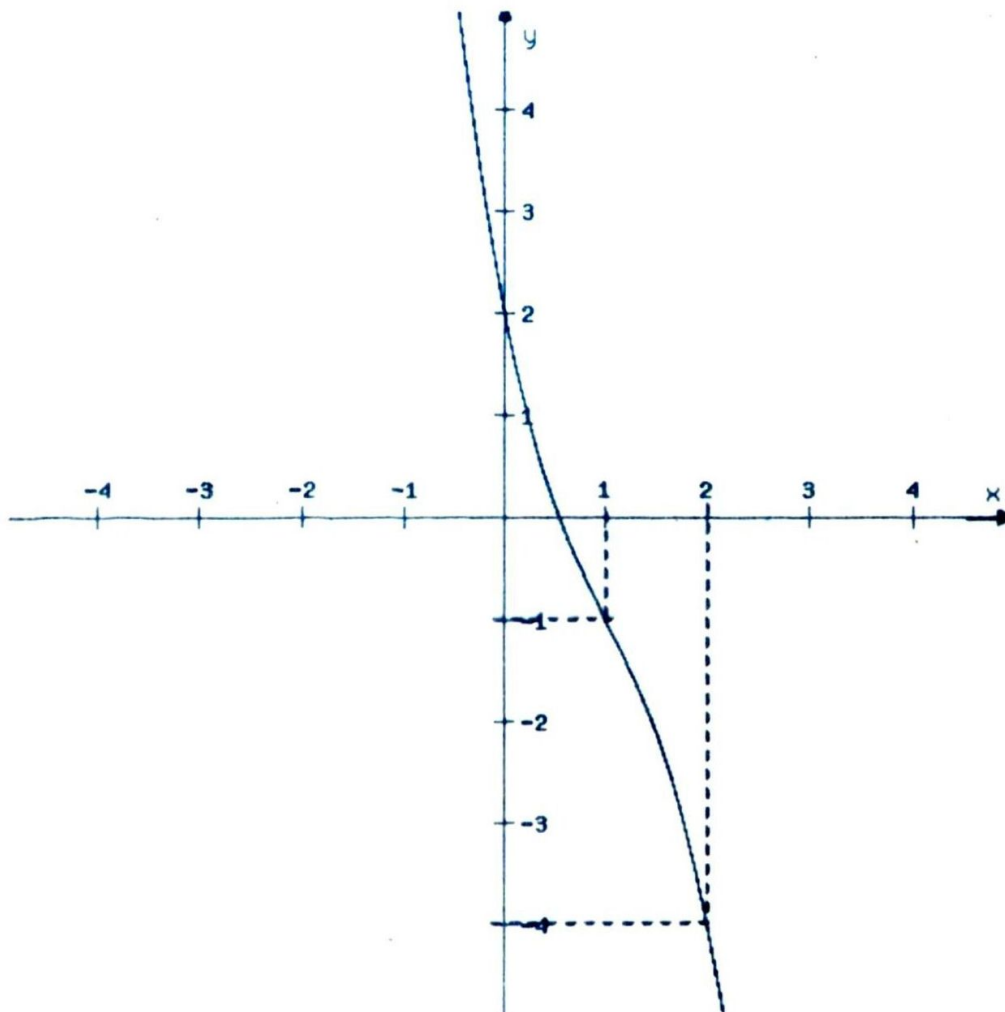
. $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$: Hàm số lõm trong $(-\infty, 1)$, lồi trong $(1, \infty)$, điểm uốn $(1, -1)$.

. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	a	∞	
y'		-	-	
y''		-	0	+
y	∞		-1	$-\infty$

. Đồ thị:



Bài 3: Khảo sát hàm số: $y = \frac{x^4}{2} - 3x^2 + \frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải:

. $D_y = \mathbb{R}$

. $y' = 2x^3 - 6x = 2x(x^2 - 3)$

. $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = \frac{5}{2} \\ x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow y = -2 \end{cases}$

Hàm số tăng trên: $(-\sqrt{3}, \infty) \cup (\sqrt{3}, \infty)$. giảm trên $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$.

CD $\left(0, \frac{5}{2}\right)$, CT $(-\sqrt{3}, 2)$, $(\sqrt{3}, -2)$.

. $y'' = 6(x^2 - 1)$

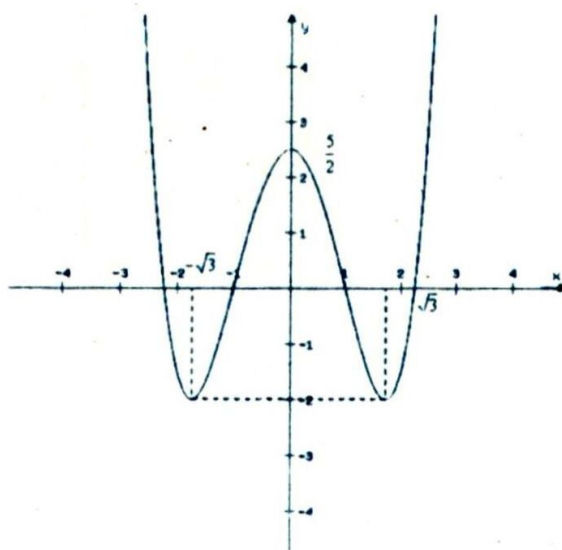
. $y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow y = 0$

. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \infty$

Bảng biến thiên

x	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$-\sqrt{3}$	∞
y'	-	0	+	+	0	+
y''	+	0	-	0	+	
y						

. Đồ thị



Bài 4:

a) Khảo sát hàm số: $y = \frac{3x+2}{x+2}$ (c)

b) Từ đồ thị (c). Hãy suy ra đồ thị các hàm số sau:

1. $y = \frac{|3x+2|}{x+2}$

2. $|y| = \frac{3x+2}{x+2}$

Hướng dẫn giải:

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$y' = \frac{4}{(x+2)^2} > 0 \quad \forall x \neq -2$: Hàm số luôn luôn tăng.

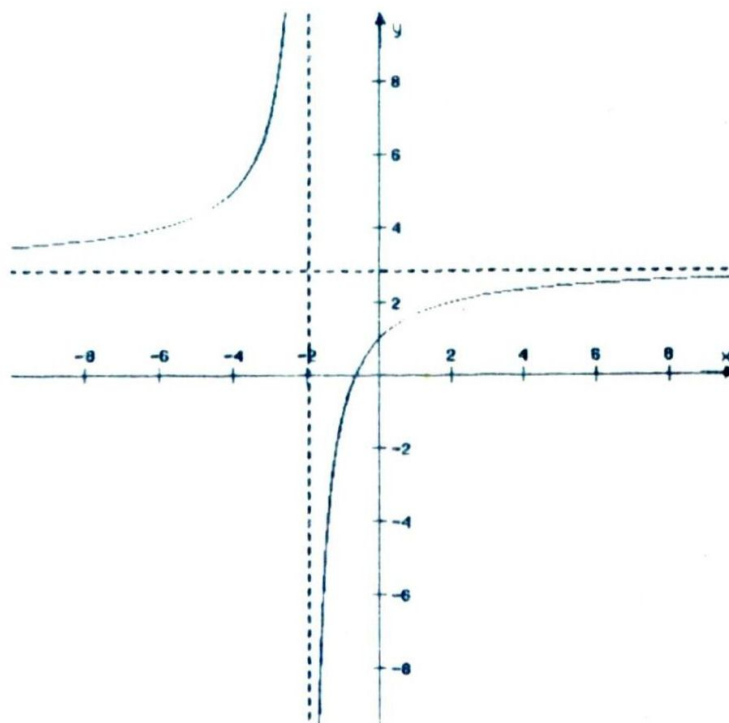
$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x+2}{x+2} = \pm\infty$: $x = -2$: là tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x+2}{x+2} = 3$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	2	∞
y'	+		+
y	3	$\begin{matrix} \nearrow \infty \\ \searrow -\infty \end{matrix}$	3

Đồ thị:



b) Suy ra đồ thị $y = \frac{|3x+2|}{x+2}$

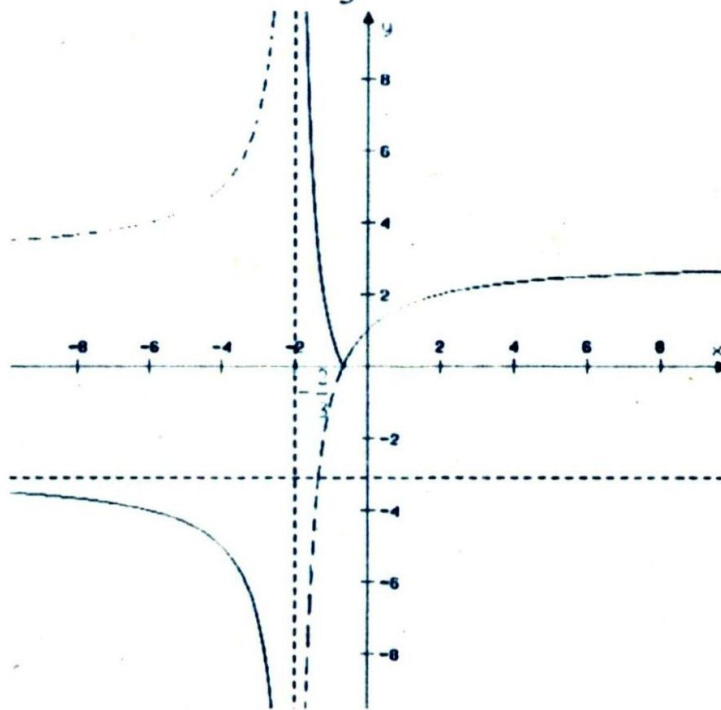
$$\text{Ta có: } y = \begin{cases} \frac{-3x+2}{x+2} & \text{khi } x \leq -\frac{2}{3} \\ \frac{3x+2}{x+2} & \text{khi } x > -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Do đó đồ thị hàm số $y = \frac{|3x+2|}{x+2}$

Từ đồ thị hàm số $y = \frac{3x+2}{x+2}$

bằng cách: – Phần đồ thị ứng với $x \geq -\frac{2}{3}$ thì giữ nguyên

– Phần đồ thị ứng với $x \leq -\frac{2}{3}$ thì thay bằng đối xứng qua Ox



$$2. \text{ Suy ra đồ thị } |y| = \frac{3x+2}{x+2} \Leftrightarrow y = \begin{cases} \frac{3x+2}{x+2} \geq 0 \\ y = \pm \frac{3x+2}{x+2} \end{cases}$$

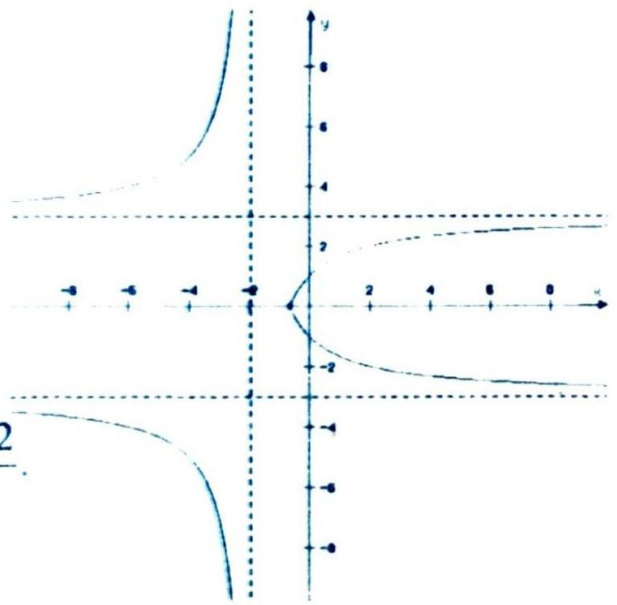
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \vee x \geq -\frac{2}{3} \\ y = \pm \frac{3x+2}{x+2} \end{cases}$$

Đồ thị được suy ra từ đồ thị hàm số trên bằng cách:

+ Phần đồ thị dưới Ox (ứng với $-2 < x < -\frac{2}{3}$) xoá bỏ đi.

+ Phần đồ thị ở trên Ox (ứng với $x < -2$ và $x \geq -\frac{2}{3}$)

giữ nguyên rồi vẽ thêm phần đối xứng của nó qua Ox.



Bài 5: Khảo sát hàm số: $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$.

Hướng dẫn giải:

Miền xác định: $D_v = R \setminus \{-1\}$

Sự biến thiên: $y' = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, y = -2 \\ x = 0, y = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	-1	0	∞	
y'	+	0	-	-	0	+
y	$-\infty$	2	∞	∞	2	∞

Hàm số tăng trên $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$, giảm trên $(-2, -1) \cup (-1, 0)$.

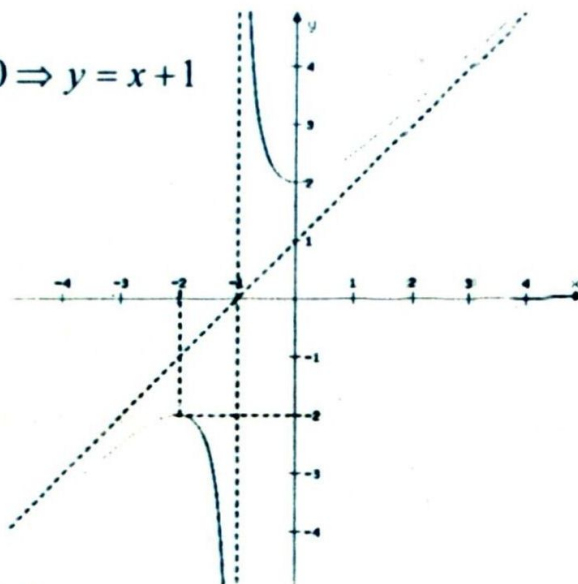
CD(-2.2), CT(0.2).

. Tiệm cận. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \pm\infty$: $x = 1$ là tiệm cận đứng.

. $y = x + 1 + \frac{1}{x+1}$ vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x+1} = 0 \Rightarrow y = x + 1$

là tiệm cận xiên.

Đồ thị:



Bài 6: Cho hàm số: $y = \frac{x^2 + x - 3}{x + 2}$ (c)

a) Khảo sát về (c)

b) Từ đồ thị trên hãy suy ra đồ thị của hàm số: $y = \frac{x^2 + x - 3}{|x + 2|}$

Hướng dẫn giải:

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

. $y' = 1 + \frac{1}{(x+2)^2} > 0 \quad \forall x \neq -2$

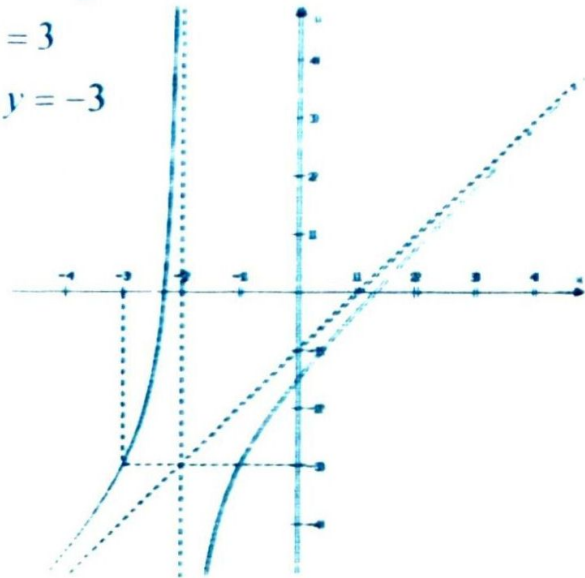
. $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \pm\infty \Rightarrow x = -2$ là tiệm cận đứng.

. $y = x - 1 + \frac{1}{x+2}$ vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x+2} = 0 \Rightarrow y = x - 1$ là tiệm cận xiên.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	∞
y'	+		+
y	$-\infty$	$\begin{array}{c} \nearrow \infty \\ \searrow -\infty \end{array}$	∞

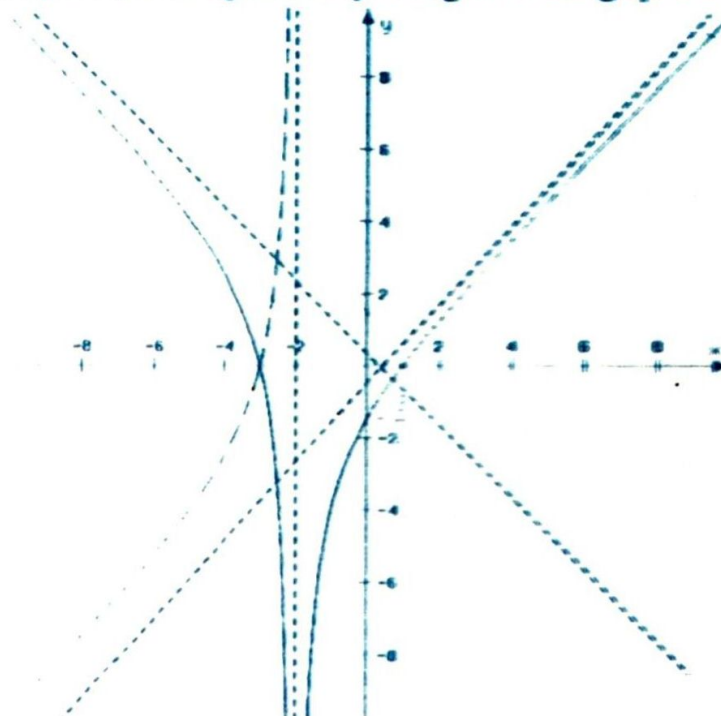
Đồ thị: Các giá trị đặc biệt $\begin{cases} x = 0, y = -\frac{3}{2} \\ x = 1, y = 3 \\ x = -3, y = -3 \end{cases}$



b) Ta có: $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{|x + 2|} = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 3}{x + 2} & \text{khi } x > -2 \\ -\frac{x^2 + x - 3}{x + 2} & \text{khi } x < -2 \end{cases}$

Do đó đồ thị được suy ra từ đồ thị trên bằng cách:

- + Phần đồ thị bên phải tiệm cận đứng thì giữ nguyên.
- + Phần đồ thị bên trái tiệm cận đứng thì thay bằng đối xứng qua trục Ox.



II. Tiếp tuyến – các vấn đề liên quan đến tính tiếp xúc

2.1 Các loại phương trình tiếp tuyến:

a) Tiếp tuyến tại 1 điểm trên đồ thị

PP. Áp dụng công thức: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

b) Tiếp tuyến phát xuất từ (hoặc đi qua) một điểm cho trước

PP1: + Đường thẳng qua $M(x_0, y_0)$ cho trước là: $y - y_0 = k(x - x_0)$.

+ Lập điều kiện tiếp xúc:
$$\begin{cases} f(x) = k(x - x_0) + y_0 \\ f'(x) = k \end{cases}$$

+ Giải hệ tìm k. Suy ra phương trình tiếp tuyến

PP2: + Tiếp tuyến tại (x_0, y_0) trên đồ thị là: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

+ Cho tiếp tuyến qua $M(x_M, y_M) \Leftrightarrow y_M - y_0 = f'(x_0)(x_M - x_0)$

+ Kết hợp với $y_0 = f(x_0)$, giải hệ tìm (x_0, y_0) , rồi suy ra kết quả

c) Tiếp tuyến có phương cho trước:

+ Tiếp tuyến có hệ số góc cho trước.

+ Tiếp tuyến song song hoặc vuông góc với đường thẳng cho trước.

+ Tiếp tuyến hợp với Ox, Oy hoặc đường thẳng cho trước một góc α .

PP + Từ giả thiết suy ra hệ số góc a

Cách 1: + Tiếp tuyến có dạng: $y = ax + b$

+ Lập điều kiện tiếp xúc
$$\begin{cases} f(x) = ax + b \\ f'(x) = a \end{cases}$$

+ Giải hệ tìm b.

Cách 2: + Giải phương trình: $f'(x) = a$ tìm x_0 .

+ Áp dụng: $y - y_0 = a(x - x_0)$.

2.2. Các Vấn Đề Liên Quan Tiếp Xúc :

1. Điều kiện tiếp xúc của 2 đường cong

PP. Hai đường cong $y = f(x)$ và $y = g(x)$ tiếp xúc nhau tại $M(x_0, y_0)$ khi

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$$

Họ đường cong $y = f(x, m)$ luôn luôn tiếp xúc lẫn nhau tại 1 điểm cố định A khi và chỉ khi $f'(x_A) = \text{hằng số } \forall m$.

2. Tìm các điểm mà từ đó vẽ được 1,2,...tiếp tuyến đến đồ thị hàm số đã cho

PP. Gọi $M(x_0, y_0)$ là điểm cần tìm, viết phương trình đường thẳng qua M có hệ số góc k: $y - y_0 = k(x - x_0)$

. Lập điều kiện tiếp xúc, đưa về phương trình theo ẩn số là k.

. Tùy theo số tiếp tuyến qua M để lí luận phương trình theo k có số nghiệm tương ứng.

Chú ý: Đề qua M có 2 tiếp tuyến vuông góc nhau thì phương trình theo k phải có 2 nghiệm thỏa: $k.k' = -1$.

3. Các điểm trên đồ thị mà tiếp tuyến song song hoặc vuông góc nhau

PP. Nếu: A,B là 2 điểm trên đồ thị thì:

+ Tiếp tuyến tại A và tại B song song nhau thì $f'(x_A) = f'(x_B)$; x_A, x_B là nghiệm của $f'(x) = k$.

+ Tiếp tuyến tại A và tại B vuông góc nhau thì $f'(x_A).f'(x_B) = -1$

. Đường thẳng $x = a$ cắt các đồ thị: $y = f(x, m)$ tại các điểm mà tại đó các tiếp tuyến đều song song với nhau thì phải có: $f'(a) = C$ (hằng số) $\forall m$.

2.3. Bài tập áp dụng :

Bài 1: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1}$, Hãy viết phương trình các tiếp tuyến với

đồ thị biết rằng tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = -x$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

. Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = -x$ nên có hệ số góc $k = -1$

Gọi (x_0, y_0) là tiếp tuyến thì x_0 là nghiệm của :

$$f'(x) = k \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = -1 \quad (*)$$

Giải (*) ta được

$$\begin{cases} x_0 = \frac{-2 + \sqrt{2}}{2} \Rightarrow y_0 = -3 + \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ x_0 = \frac{-2 - \sqrt{2}}{2} \Rightarrow y_0 = -3 - \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Do đó có hai tiếp tuyến song song với $y = -x$ là:

$$y = -x + 2\sqrt{2} - 4 \text{ và } y = -x - 2\sqrt{2} - 4.$$

Bài 2: Cho hàm số: $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

a) Gọi A là điểm trên đồ thị có $x_A = a$. Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) với đồ thị tại A

b) Tìm a để tiếp tuyến Δ đi qua $M(1, 0)$, chứng minh rằng qua M có 2 tiếp tuyến vuông góc nhau đến đồ thị trên

Hướng dẫn giải:

a) $x_A = a \Rightarrow y_A = \frac{a^2 + 2a + 2}{a + 1}$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(a) = \frac{a^2 + 2a}{(a+1)^2}$$

Tiếp tuyến tại A có phương trình: $y - \left(\frac{a^2 + 2a + 2}{a + 1} \right) = \frac{a^2 + 2a}{(a+1)^2} (x - a)$

$$\Leftrightarrow y = \left(\frac{a^2 + 2a}{(a+1)^2} \right) (x - a) + \frac{a^2 + 2a + 2}{a + 1} \quad (\Delta)$$

b) Để (Δ) qua $M(1, 0)$ ta phải có:

$$0 = \frac{a^2 + 2a}{(a+1)^2} (1 - a) + \frac{a^2 + 2a + 2}{a + 1}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 3a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Gọi a_1, a_2 là hoành độ giao điểm, k_1, k_2 là hệ số góc tiếp tuyến, ta có

$$k_1.k_2 = f'(a_1).f'(a_2) = \left(\frac{a_1^2 + 2a_1}{(a_1 + 1)^2} \right) \left(\frac{a_2^2 + 2a_2}{(a_2 + 1)^2} \right) = \frac{(a_1 a_2)^2 + 2a_1 a_2 (a_1 + a_2) + 4a_1 a_2}{[a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 1]^2}$$

Với $a_1 + a_2 = -3, a_1 a_2 = 1 \Rightarrow k_1 k_2 = -1$.

Vậy qua M có 2 tiếp tuyến vuông góc nhau đến đồ thị trên.

Bài 3: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị biết tiếp tuyến đi qua $M(2/3, -1)$.

Hướng dẫn giải:

Đường thẳng qua M có hệ số góc k: $y = k \left(x - \frac{2}{3} \right) - 1$.

$$\text{Điều kiện tiếp xúc: } \begin{cases} x^3 - 3x + 1 = k \left(x - \frac{2}{3} \right) - 1 & (1) \\ 3x^2 - 3 = k & (2) \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ (1)} \Rightarrow x^3 - 3x + 1 = (3x^2 - 3) \left(x - \frac{2}{3} \right) - 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow k = -3 \\ x = 1 \Rightarrow k = 0 \end{cases}$$

Vậy có 2 tiếp tuyến qua M là: $\begin{cases} y = -3x + 1 \\ y = -1 \end{cases}$

Bài 4: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ và đường thẳng (Δ) có phương trình $y = 9x - 14$. Tìm các điểm M trên (Δ) để qua M có thể vẽ được hai tiếp tuyến đến đồ thị trên.

Hướng dẫn giải:

Gọi $M(x_0, 9x_0 - 14)$ là điểm trên (Δ) , đường thẳng qua M có hệ số góc a là: $y = a(x - x_0) + 9x_0 - 14$.

$$\text{Điều kiện tiếp xúc: } \begin{cases} x^3 - 3x + 2 = ax + (9-a)x_0 - 14 \\ 3x^2 - 3 = a \end{cases}$$

$$(1), (2) \Rightarrow 2x^3 - 3x_0 x^2 = 12x_0 - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(2x^2 + (4-3x_0)x + 2(4-3x_0)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ f(x) = 2x^2 + (4-3x_0)x + 2(4-3x_0) \end{cases}$$

Để qua M có 2 tiếp tuyến thì $f(x) = 0$ có nghiệm kép khác 2 hoặc có 2 nghiệm trong đó có một nghiệm bằng 2

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \Leftrightarrow x_0 = -4 \vee x_0 = \frac{4}{3} \\ f(2) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2 \end{cases}$$

Vậy trên (Δ) có các điểm $M_1(-4, -50), M_2(\frac{4}{3}, -2), M_3(2, 4)$ mà qua đó có 2 tiếp tuyến.

Bài 5: Tìm a để đồ thị $y = x^2 + a$ tiếp xúc với đồ thị $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

Hướng Dẫn Giải:

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của 2 đồ thị

$$\text{Ta phải có: } \begin{cases} \frac{x_0^2 - x_0 + 1}{x_0 - 1} = x_0^2 + a & (1) \\ 1 - \frac{1}{(x_0 - 1)^2} = 2x_0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Giải (1) và (2)} \Rightarrow x_0[2x_0^2 - 5x_0 + 4] = 4 \Rightarrow x_0 = 0$$

Thay vào (1) ta được $a = -1$

Bài 6: Cho hàm số: $y = \frac{x+1}{x-1}$. Chứng minh trên đồ thị có vô số cặp điểm

A, B mà tiếp tuyến tại đó song song nhau.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}.$$

Gọi A, B là 2 điểm trên đồ thị mà tiếp tuyến tại đó song song nhau, ta phải có $f'(x_A) = f'(x_B)$

$\Leftrightarrow x_A, x_B$ là nghiệm của $f'(x) = k$

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{(x-1)^2} = k \quad (*)$$

Với mỗi giá trị $k < 0$ thì $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt, nghĩa là có 2 điểm A, B trên đồ thị mà tiếp tuyến tại đó song song nhau. Vì có vô số giá trị $k < 0$ nên có vô số cặp điểm A, B như trên.

Bài 7: Cho hàm số $y = mx^3 + (m+3)x^2 - (m+2)x + 2$.

Tìm a để đường thẳng $x = a$ cắt đồ thị tại các điểm (khi m thay đổi) mà các tiếp tuyến tại đó đều song song nhau.

Hướng dẫn giải:

Ta có $f'(x) = 3mx^2 + 2(m+3)x - (m+2)$

$$= (3x^2 + 2x - 1)m + 6x - 2.$$

Để tiếp tuyến tại giao điểm của $x = a$ với các đồ thị trên đều song song nhau ta phải có: $f'(a)$ không đổi khi m thay đổi

$$\Rightarrow 3a^2 + 2a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1 \vee a = \frac{1}{3}.$$

Vậy khi $a = -1$ hay $a = \frac{1}{3}$ thì tại các giao điểm của $x = a$ với đồ thị trên các tiếp tuyến đều song song nhau.

Bài 8: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 1}{x}$. Tìm trên trục Ox của mặt phẳng tọa độ các điểm mà từ đó có thể vẽ được 2 tiếp tuyến vuông góc nhau đến đồ thị trên.

Hướng dẫn giải:

Gọi $M(x_0, 0) \in Ox$, đường thẳng qua M có hệ số góc k là $y = k(x - x_0)$.

$$\text{Điều kiện tiếp xúc là: } \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{x} = k(x - x_0) & (1) \\ 1 - \frac{1}{x^2} = k & (2) \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ ta có: } (1) \text{ và } (2) \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)(x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow x_0 x^2 + 2x - x_0 = 0 \quad (x \neq 0) \quad (3)$$

Để qua M có 2 tiếp tuyến vuông góc nhau ta phải có:

$$k_1 k_2 = -1 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{x_1^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x_2^2}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow 2P^2 - S^2 + 2P + 1 = 0 \quad \text{Với } S = x_1 + x_2 = \frac{-2}{x_0}, P = -1$$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{4}{x_0^2} - 2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2$$

Vậy có 2 điểm trên Ox là $M_1(0, 2), M_2(0, -2)$ mà qua đó có 2 tiếp tuyến vuông góc nhau đến đồ thị

Bài 9: Tìm m để đường cong $y = \frac{x^2 - 2mx + m}{(x + m)}$ cắt Ox tại 2 điểm phân biệt

mà 2 tiếp tuyến tại đó vuông góc nhau.

Hướng Dẫn Giải:

Giao điểm của đồ thị với Ox có hoành độ là nghiệm của phương trình

$$y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m = 0 \quad (x \neq -m)$$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{(2x - 2m) - (x^2 - 2mx + m)}{(x + m)^2}$$

$$\text{Hệ số góc tiếp tuyến tại giao điểm với Ox: } f'(x_0) = \frac{2x_0 - 2m}{x_0 + m}$$

Để tiếp tuyến tại 2 giao điểm vuông góc nhau phải có

$$f'(x_1) \cdot f'(x_2) = -1 \Leftrightarrow \frac{2(x_1 - m)}{x_1 + m} \cdot \frac{2(x_2 - m)}{x_2 + m} = -1$$

$$\Leftrightarrow 4(x_1 x_2 - m(x_1 + x_2) + m^2) + x_1 x_2 + m(x_1 + x_2) + m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5P - 3mS + 5m^2 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Với } S = 2m, P = m \quad (*) \Leftrightarrow -m^2 + 5m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 5 \end{cases}$$

Điều kiện tồn tại 2 giao điểm:

$S^2 - 4P > 0 \Leftrightarrow m^2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 0 \vee m > 1$. Do đó khi $m = 5$ thì đồ thị cắt Ox tại hai điểm mà tiếp tuyến tại đó vuông góc nhau.

2.4. Bài tập tự luyện:

Bài 1: Cho hàm số: $y = \frac{x^2 - x + 1}{x}$. Chứng minh rằng qua $A(2, -1)$ có 2 tiếp tuyến vuông góc nhau đến đồ thị trên. Viết phương trình các tiếp tuyến đó.

Bài 2: Tìm A trên Oy sao cho qua A vẽ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị $y' = x^4 - x^2 + 1$.

Bài 3: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

- Viết phương trình các tiếp tuyến với đồ thị xuất phát từ $A\left(\frac{23}{9}, -2\right)$.
- Tìm trên đường thẳng $y = -2$ các điểm mà từ đó có thể vẽ được 2 tiếp tuyến vuông góc nhau.

Bài 4: Cho hàm số $y = x + \sqrt{2x^2 + 1}$. Tìm trên Oy các điểm mà từ đó vẽ được ít nhất 1 tiếp tuyến đến đồ thị trên.

Bài 5: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2|x| + 2}{|x| - 1}$ (c)

- Khảo sát vẽ (c).
- Viết phương trình các tiếp tuyến xuất phát từ $A(3, 0)$.

Bài 6: Cho hàm số: $y = x^3 + (m - 2)x^2 - 2mx + m$ (C_m). Chứng minh với mọi giá trị của m , họ đồ thị (C_m) luôn luôn tiếp xúc với 1 đường thẳng cố định tại 1 điểm cố định.

Bài 7: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m + 3)x^2 + 18mx - 8$. Tìm m để đồ thị hàm số tiếp xúc với Ox .

Bài 8: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$.

- Chứng minh rằng trên đồ thị không tồn tại hai điểm sao cho hai tiếp tuyến tại 2 điểm đó vuông góc nhau.
- Tìm k để trên đồ thị có ít nhất 1 điểm mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $y = kx$.

2.5. Hướng dẫn đáp số:

Bài 1: Hai tiếp tuyến phát xuất từ A là:

$$y = \frac{\sqrt{5}+1}{2}(x-2)-1 \text{ và } y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(x-2)-1.$$

Bài 2: Đáp số A(0,1).

Bài 3: a) Có 3 tiếp tuyến qua $A\left(\frac{23}{9}, -2\right)$ là $y = -2, y = 9x - 25, y = -\frac{5}{3}x + \frac{61}{27}$

b) Gọi $A(a, -2)$ ở trên đường thẳng $y = -2$

Tiếp tuyến tại $M(x_0, y_0)$ là: $y = (3x_0^2 - 6x_0)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 + 2$.

Cho tiếp tuyến qua A $\Leftrightarrow (x_0 + 2)(2x_0^2 - (3a - 1)x_0 + 2) = 0$

Đề ý: $x_0 + 2 = 0 \Rightarrow y = -2$ là tiếp tuyến song song với Ox nên 2 tiếp tuyến vuông góc ứng với tiếp điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình: $2x^2 - (3a - 1)x + 2 = 0$. Để hai tiếp tuyến vuông góc ta phải có:

$$f'(x_1) \cdot f'(x_2) = -1$$

$$\Leftrightarrow 9x_1x_2[x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4] = -1 \text{ với } x_1 + x_2 = 1; x_1x_2 = \frac{3a-1}{2}$$

$$\text{Giải ta được } a = \frac{55}{27} \Rightarrow A\left(\frac{55}{27}, -2\right)$$

Bài 4: Viết phương trình tiếp tuyến tại $M(x_0, y_0)$ trên đồ thị.

$$\text{Cho tiếp tuyến cắt Oy: } y = \frac{1}{\sqrt{2x_0^2 + 1}}$$

Đáp số $0 < y \leq 1$.

Bài 5: Đáp số: Qua A có 3 tiếp tuyến là: $y = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8}(x - 3); y = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}(x - 3)$

Bài 6: Tìm được điểm cố định: (1, -1).

Chứng minh $f'(1) = -1 \forall x \in R$.

Bài 7: Dùng điều kiện tiếp xúc Ox là: $\begin{cases} 2x^3 - 3(m+3)x^2 + 18mx - 8 = 0 \\ 6(x^2 - (m+3)x + 3m) = 0 \end{cases}$

$$\text{Giải hệ ta được: } m = 1, m = 4 \pm 2\sqrt{6}; m = \frac{35}{27}.$$

III. Biện luận số nghiệm của phương trình bằng đồ thị

3.1 Tóm tắt lý thuyết:

PP: Để biện luận số nghiệm của phương trình $F(x,m) = 0$ bằng đồ thị $y = f(x)$ ta biến đổi phương trình về dạng:

$$F(x,m) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x,m).$$

Số nghiệm của phương trình $F(x,m) = 0$ chính là số giao điểm của hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x,m)$.

Ta thường gặp các dạng sau:

a. Dạng $f(x) = g(m)$

+ Vẽ đồ thị $y = f(x)$

+ Vẽ đường thẳng song song với Ox: $y = g(m)$ (Δ)

+ Cho Δ di động dựa vào số giao điểm để suy ra số nghiệm của phương trình.

Chú ý: Dạng $f(x) = g(m)$ ta có thể:

Vẽ đồ thị $y = f(x)$ (c)

Vẽ đường thẳng $x = m$ (song song với Oy), từ giao điểm với đồ thị vẽ đường thẳng (Δ) song song với Ox, số giao điểm của (Δ) với (c) ứng với số nghiệm, vị trí đường $x = m$ cho ta giá trị tương ứng của m .

b. Dạng $f(x) = kx + b$ với k là hằng số, b phụ thuộc vào m .

+ Vẽ đồ thị $y = f(x)$

+ Tìm các tiếp tuyến với đồ thị song song với đường $y = kx$, xác định các giao điểm của các tiếp tuyến với Oy.

+ Cho đường $y = kx + b$ di động song song với các tiếp tuyến tùy theo số giao điểm để suy ra số nghiệm của phương trình.

c. Dạng: $f(x) = ax + b$ với a, b đều phụ thuộc vào m

+ Vẽ đồ thị $y = f(x)$.

+ Tìm điểm cố định của $y = ax + b$, tìm các tiếp tuyến xuất phát từ điểm cố định đó.

+ Cho đường thẳng $y = ax + b$ quay quanh điểm cố định dựa vào hệ số góc của các tiếp tuyến, tùy theo số giao điểm suy ra số nghiệm.

Chú ý: Đối với các phương trình dạng $F(x,m) = 0$ ở dạng phương trình lượng giác, mũ, logarit, bậc cao...thì dùng ẩn phụ đưa về phương trình theo ẩn phụ rồi áp dụng cho dạng trên để giải.

3.2. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Cho hàm số: $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$.

a. Khảo sát vẽ đồ thị.

b. Dùng đồ thị hàm số trên để biện luận số nghiệm phương trình $2x^3 - 9x^2 + 12x + m = 0$.

Hướng dẫn giải:

a. Học sinh tự khảo sát và vẽ đồ thị

b. $2x^3 - 9x^2 + 12x + m = 0$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4 = -m - 4$$

Biện luận:

+ Khi $-m - 4 < 0 \Leftrightarrow m > -4$, phương trình có 1 nghiệm.

+ Khi $-m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = -4$, phương trình có 2 nghiệm.

+ Khi $0 < -m - 4 < 1 \Leftrightarrow -5 < m < -4$, phương trình có 3 nghiệm.

+ Khi $-m - 4 = 1 \Leftrightarrow m = -5$, phương trình có 2 nghiệm.

+ Khi $-m - 4 > 1 \Leftrightarrow m < -5$, phương trình có 1 nghiệm.

Bài 2:

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x$.

b. Dùng đồ thị trên hãy biện luận theo m số nghiệm của phương trình $x^3 - 6x = m^3 - 6m$.

Hướng dẫn giải:

a. Học sinh tự khảo sát.

b. Biện luận :

Vẽ đường $x = m$ tại giao điểm với đồ thị vẽ đường song song với Ox: $y = m^3 - 6m$, cho di động ta có :

+ Khi $m < -2\sqrt{2}$: phương trình có một nghiệm.

+ Khi $m = -2\sqrt{2}$: Phương trình có 1 nghiệm kép và 1 nghiệm đơn.

+ Khi $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$, $m \neq \pm \sqrt{2}$: Phương trình có 3 nghiệm.

- + Khi $m = \pm\sqrt{2}$, phương trình có 1 nghiệm kép và 1 nghiệm đơn.
- + Khi $m = 2\sqrt{2}$, phương trình có 1 nghiệm kép và 1 nghiệm đơn.
- + Khi $m > 2\sqrt{2}$, phương trình có 1 nghiệm.

Bài 3: Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x$.

- a. Khảo sát vẽ đồ thị hàm số trên.
- b. Dùng đồ thị hàm số trên đề biện luận theo m số nghiệm của phương trình $x^3 - 2x^2 - m = 0$.

Hướng dẫn giải:

- a. Học sinh tự khảo sát.
- b. Ta có phương trình $x^3 - 2x^2 - m = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 + x = x + m$.

Tiếp tuyến song song với $y = x + m$.

Ta có $f(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = \frac{4}{3} \Rightarrow y = \frac{4}{27} \end{cases}$$

Do đó, tiếp tuyến tại $(0,0)$ là $y = x$.

Tiếp tuyến tại $(\frac{4}{3}; \frac{4}{27})$ là $y = x - \frac{32}{27}$.

Về đường thẳng $y = x + m$ (song song với các tiếp tuyến).

Các tiếp tuyến $y = x$ và $y = x - \frac{32}{27}$ cắt Oy tại các điểm $(0,0)$ và $(0, -\frac{32}{27})$.

Cho đường thẳng $y = x + m$ di động ta có kết quả sau:

- + Khi $m < -\frac{32}{27}$: phương trình có 1 nghiệm.
- + Khi $m = -\frac{32}{27}$: phương trình có 1 nghiệm đơn và 1 nghiệm kép.
- + Khi $-\frac{32}{27} < m < 0$: phương trình có 3 nghiệm.
- + Khi $m = 0$, phương trình có 1 nghiệm kép và 1 nghiệm đơn.
- + Khi $m > 0$ phương trình có 1 nghiệm.

Bài 4:

- a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số: $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 4$.
 b. Dùng đồ thị trên để biện luận số nghiệm của phương trình: $x^3 + 6x^2 + (9 - m)x + 2 - 2m = 0$.

Hướng dẫn giải:

- a. Học sinh tự khảo sát và vẽ đồ thị.
 b. Ta có:

$$x^3 + 6x^2 + (9 - m)x + 2 - 2m = 0 \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = m(x + 2) + 2.$$

+ Đường thẳng $y = m(x + 2) + 2$ quay quanh $I(-2, 2)$ khi m thay đổi.
 $I(-2, 2)$ là điểm uốn của đồ thị trên.

+ Hệ số góc tiếp tuyến tại I là $k = f'(2) = -3$.

+ Cho Δ quay quanh I , tùy theo số giao điểm ta có số nghiệm của phương trình.

Biện luận:

- + Khi $m < -3$: phương trình có 1 nghiệm $x = -2$
- + Khi $m = -3$: phương trình có 1 nghiệm kép $x = -2$
- + Khi $m > -3$: phương trình có 3 nghiệm.

Bài 5:

- a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số: $y = -x^3 + 3x$. Từ đó suy ra đồ thị hàm số $y = |-x^3| + 3|x|$.

- b. Tìm tất cả giá trị của m để phương trình $x^3 - 3x = \frac{2m}{m^2 + 1}$ có 3 nghiệm phân biệt.

Hướng dẫn giải:

- a. Học sinh tự khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x$.

$$\text{Ta có } y = |-x^3| + 3|x| = \begin{cases} -x^3 + 3x & \text{khi } x \geq 0 \\ x^3 - 3x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

Đề ý rằng $y = f(x) = |-x^3| + 3|x|$ là hàm số chẵn, do đó đồ thị đối xứng qua Oy . Để suy ra đồ thị $y = |-x^3| + 3|x|$ từ đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x$, ta thực hiện:

+ Giữ nguyên phần đồ thị ở bên phải Oy (ứng với $x \geq 0$).

+ Vẽ thêm phần đối xứng của đồ thị trên qua Oy).

b. Ta có: $x^3 - 3x = \frac{2m}{m^2 + 1} \Leftrightarrow -x^3 + 3x = \frac{-2m}{m^2 + 1}$.

Đề ý: $m^2 + 1 \geq 2|m| \Rightarrow \frac{2|m|}{m^2 + 1} \leq 1$

$$\Leftrightarrow -1 \leq \frac{-2m}{m^2 + 1} \leq 1.$$

Vẽ đường thẳng $y = \frac{-2m}{m^2 + 1}$ song song với Ox trên $[-1, 1]$, trên trục Oy

đường $y = \frac{-2m}{m^2 + 1}$ luôn luôn cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt. Do đó,

phương trình luôn có 3 nghiệm phân biệt.

3.3. Bài tập tự luyện:

Bài 1:

a. Khảo sát vẽ đồ thị $y = \frac{-x^2 + 3x}{2(x-1)}$, từ đó suy ra đồ thị $y = \frac{x^2 + 3x}{2|x-1|}$.

b. Dùng đồ thị trên để biện luận theo m số nghiệm của phương trình:
 $x^3 + 3x + 2m[x-1] = 0$.

Bài 2: Cho hàm số $y = \frac{-x+3}{2x-1}$ (c).

a. Khảo sát vẽ đồ thị (c).

b. Viết phương trình các tiếp tuyến với đồ thị song song với đường $y = -x$.

c. Dùng đồ thị trên để biện luận theo k số nghiệm của phương trình:

$$2x^2 - 2kx - 2x + k + 3 = 0.$$

Bài 3: Dùng đồ thị để biện luận theo m số nghiệm của phương trình:

$$\sqrt{4-x^2} = mx + 2 - m.$$

Bài 4: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2$ (c).

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (c).

b. Tìm k để phương trình $y = -x^3 + 3x^2 + k^3 - 3k^2 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Bài 5: Biện luận theo m số nghiệm của phương trình:

$$\cos 2x + 2(1 - m) \cos x + 3 - 2m = 0 \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

3.4. Hướng dẫn đáp số:

Bài 1:

b. Biến đổi phương trình về dạng $-\frac{x^2 + 3x}{2|x - 1|} = k$.

Biện luận:

+ $k < -\frac{9}{2}$: Phương trình có 4 nghiệm.

+ $k = -\frac{9}{2}$: Phương trình có 3 nghiệm.

+ $-\frac{9}{2} < k < \frac{9}{2}$: Phương trình có 2 nghiệm.

+ $k = \frac{1}{2}$: Phương trình có 1 nghiệm.

+ $k > \frac{1}{2}$: Phương trình vô nghiệm.

Bài 2: Các tiếp tuyến song song với $y = -x$ là $y = -x \pm \sqrt{5}$.

Biến đổi phương trình trở thành $\frac{-3 + x}{2x - 1} = -x + k$.

+ Vẽ đường $y = -x + k$, cho di động song song với $y = -x$.

Ta có:

+ Khi $m < -\sqrt{5}$: Phương trình có 2 nghiệm.

+ Khi $m = -\sqrt{5}$: Phương trình có 1 nghiệm.

+ Khi $-\sqrt{5} < m < \sqrt{5}$: Phương trình vô nghiệm.

+ Khi $m = \sqrt{5}$: Phương trình có 1 nghiệm.

+ Khi $m > \sqrt{5}$: Phương trình có 2 nghiệm.

Bài 3:

+ Để có $y = \sqrt{4 - x^2}$ là nửa đường tròn tâm O bán kính R (phần trên Ox).

+ $y = mx + 2 - m$ là đường thẳng quay quanh điểm A (1,2). Ta có kết quả biện luận sau:

Khi $m > \frac{2}{3}$: Phương trình có 1 nghiệm.

Khi $0 < m < \frac{2}{3}$: Phương trình có 2 nghiệm.

Khi $m = 0$: Phương trình có nghiệm kép.

Khi $-\frac{4}{3} < m < 0$: Phương trình vô nghiệm.

Khi $m = -\frac{4}{3}$: Phương trình có 1 nghiệm kép.

Khi $-2 < m < -\frac{4}{3}$: Phương trình có 2 nghiệm.

Khi $m < -2$: Phương trình có 1 nghiệm.

Bài 4: Xem bài 2 phần bài tập áp dụng.

Bài 5: Đặt $t = \cos x$, $t \in [-1, 1]$

Biến đổi phương trình về dạng: $\frac{t^2 + t + 1}{t + 1} = m$, $t \in (-1, 1)$.

Dùng đồ thị $y = \frac{t^2 + t + 1}{t + 1}$, $t \in (-1, 1)$ để biện luận.

IV. Tính chất giao điểm – khoảng cách

4.1 Tóm tắt lý thuyết:

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (F) và hàm số $y = g(x)$ có đồ thị (G) thì:

+ (F) không cắt (G) $\Leftrightarrow f(x) = g(x)$ vô nghiệm.

+ (F) tiếp xúc (G) tại A $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x_A) = g(x_A) \\ f'(x_A) = g'(x_A) \end{cases}$

+ (F) cắt (G) $\Leftrightarrow f(x) = g(x)$ có nghiệm đơn.

Số nghiệm tương ứng với số giao điểm – tính chất giao điểm tương ứng với tính chất của nghiệm phương trình.

Khoảng cách giữa 2 điểm A và B: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_A - y_B)^2}$

Khoảng cách từ M (x_0, y_0) đến đường thẳng (Δ) có phương trình:

$$Ax + By + C = 0 \text{ là } d(M, \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

4.2. Bài Tập Áp Dụng:

Bài 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ (c) đường thẳng (d) : $y = ax + b$.

Tìm điều kiện đối với a và b để cho (d) cắt (c) tại 3 điểm A, B, C mà B là trung điểm của AC.

Hướng Dẫn Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (c) và (d) là:

$$x^3 - 3x^2 - 9x + 1 = ax + b$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - (9 + a)x + 1 - b = 0 (*)$$

Để (d) cắt (c) tại A, B, C mà B là trung điểm của AC thì (*) phải có 3

$$\text{nghiệm } x_1, x_2, x_3 \text{ thoả mãn: } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -(9+a) \\ x_1 + x_2 + x_3 = b-1 \\ x_1 + x_2 = 2x_3 \end{cases}$$

Khử x_1, x_2, x_3 ta có: $a + b = -10$.

Khi đó (*) trở thành

$$x^3 - 3x^2 - (9+a)x + 11+a = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - 11 - a) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - 11 - a = 0 \end{cases}$$

Để phương trình có 3 nghiệm thì $x^2 - 2x - 11 - a = 0$ phải có 2 nghiệm khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 12 + a > 0 \Leftrightarrow a > -12 \\ 1 - 2 - 11 - a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -12 \end{cases}$$

Vậy khi $a + b = -1$ và $a > -12$ thì (d) cắt (c) tại 3 điểm A, B, C mà B là trung điểm của AC

Bài 2: Cho hàm số $y = x + 2 + \frac{1}{x-2}$ tìm m để đường thẳng $y = -x + m$ cắt

đồ thị trên tại 2 điểm, chứng minh rằng khi đó cả 2 giao điểm ở cùng 1 nhánh của đồ thị.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm: } x + 2 + \frac{1}{x-2} = -x + m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ 2x^2 - mx + m - 1 = 0 \end{cases}$$

Để đường thẳng $y = -x + m$ cắt đồ thị trên tại 2 điểm ta phải có:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m + 8 > 0 \Leftrightarrow m < 4 - 2\sqrt{2} \text{ và } m > 4 + 2\sqrt{2}$$

$$\text{Khi đó } 2f(1) = 1 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 < x_2 < 1 \\ 1 < x_1 < x_2 \end{cases}$$

Vậy khi $m < 4 - 2\sqrt{2}$ và $m > 4 + 2\sqrt{2}$ thì đường thẳng cắt đồ thị trên tại 2 điểm ở cùng 1 nhánh của đồ thị.

Bài 3: Tìm m để đồ thị hàm số: $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1$ cắt trục Ox tại 4 điểm có hoành độ tạo thành cấp số cộng.

Hướng Dẫn Giải:

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm: } x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1 = 0 (*)$$

Gọi $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ là hoành độ 4 giao điểm.

Để chúng tạo thành cấp số cộng ta phải có $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3$.

Theo tính chất nghiệm của (*) ta có $x_4 = -x_1, x_3 = -x_2$

$$\text{Đặt } x_3 = a \Rightarrow x_2^2 = x_3^2 = X_1 = a^2$$

$$x_1^2 = x_4^2 = X_2 = 9a^2$$

$$(*) x^2 - 2(m+1)x + 2m+1 = 0$$

$$\text{Ta có } X_1 + X_2 = 10a^2 = 2(m+1)$$

$$X_1 X_2 = 9a^4 = 2m+1, \quad x_2 = 9a^4 = 2m+1$$

$$\text{Khử } a \text{ ta được: } 9m^2 - 32m - 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{4}{9} \\ m = 4 \end{cases}$$

Để tồn tại 4 giao điểm ta phải có:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m + 1 - 2m - 1 > 0 \Rightarrow m \neq 0 \\ 2m + 1 > 0 \Rightarrow m > -\frac{1}{2} \\ 2(m+1) > 0 \Rightarrow m > -1 \end{cases}$$

Kết hợp: $m > -\frac{1}{2}$ và m khác 0.

So với điều kiện ta chọn $m = -\frac{4}{9}; m = 4$.

Bài 4: Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + x + a}{x + a}$.

Hãy tìm các giá trị a để đồ thị hàm số cắt đường $y = x + 1$ tại 2 điểm phân biệt, khi đó gọi y_1, y_2 là tung độ 2 giao điểm tìm hệ thức giữa y_1, y_2 không phụ thuộc vào a .

Hướng Dẫn Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{-x^2 + x + a}{x + a} = x + 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -a \\ 2x^2 + (a-2)x - 2a = 0 \quad (1) \end{cases}$$

Đề đường $y = x - 1$ cắt đồ thị tại 2 điểm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm khác $-a$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \Leftrightarrow a^2 + 12a + 4 > 0 \Leftrightarrow a < -6 - 4\sqrt{2}, a < -6 + 4\sqrt{2} \\ f(-a) \neq 0 \end{cases}$$

Vậy khi $a < -6 - 4\sqrt{2}$ và $a > -6 + 4\sqrt{2}$ và $a \neq 0$ thì đường thẳng cắt đồ thị tại 2 điểm phân biệt có $y_1 + y_2 = (x_1 + x_2) - 1 = -\frac{a}{2} - 1$

$$y_1 y_2 = (x_1 - 1)(x_2 - 1) = -\frac{a}{2} \text{ do đó:}$$

$$y_1 y_2 = (x_1 - 1)(x_2 - 1) = -\frac{a}{2}, \text{ do đó: } y_1 y_2 - (y_1 + y_2) = 1.$$

Bài 5: Cho hàm số: $y = \frac{x+1}{x-1}$ (H).

a) Gọi (d) là đường thẳng có phương trình $y = 2x + m$.

Chứng minh (d) luôn luôn cắt (H) tại hai điểm A, B tại 2 nhánh của đồ thị.

b) Tìm m để độ dài AB là ngắn nhất.

Hướng Dẫn Giải:

a. Phương trình hoành độ giao điểm

$$2x + m = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ 2x^2 + (m-3)x - m - 1 = 0 \end{cases}$$

Vì $\Delta f(1) = -4 < 0$ nên phương trình luôn luôn có 2 nghiệm thỏa mãn $x_1 < 1 < x_2$ do đó (d) luôn luôn cắt đồ thị trên tại A, B ở 2 nhánh khác nhau của đồ thị.

b) Ta có:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{5(x_B - x_A)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}[(m+1)^2 + 16]} \geq 2\sqrt{5}$$

$$AB_{\min} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow m = -1.$$

Vậy khi $m = -1$ thì $(AB)_{\min}$.

Bài 6: Cho hàm số: $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

Tìm trên hai nhánh đồ thị hai điểm A, B sao cho độ dài AB là bé nhất.

Hướng Dẫn Giải:

Ta có 2 nhánh đồ thị cắt nhau bởi tiệm cận đứng. Gọi A $\left(1-a, 1-a - \frac{1}{a}\right)$;

B $\left(1+b, 1+b + \frac{1}{b}\right)$ ($a, b > 0$) là hai điểm trên hai nhánh của đồ thị, ta có:

$$AB^2 = (b+a)^2 + \left(b+a + \frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)^2 = 2(a+b)^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 + 2(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

$$\text{Do đó: } AB^2 \geq 8ab + \frac{4}{ab} + 8 \geq 2\sqrt{32} + 8 = 8(1+\sqrt{2}).$$

$$\text{Đẳng thức khi } \begin{cases} a = b \\ 8ab = \frac{4}{ab} \end{cases} \Rightarrow a = b = \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

$$\text{Vậy khi } A\left(1 + \frac{1}{4\sqrt{2}}, 1 + \sqrt[4]{2} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), B\left(1 - \frac{1}{4\sqrt{2}}, 1 - \sqrt[4]{2} - \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$$

thì AB bé nhất.

Bài 7: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x - 5}{x - 2}$.

Chứng minh rằng tích số khoảng cách từ 1 điểm bất kỳ trên đồ thị đến 2 tiệm cận luôn luôn bằng 1 hằng số.

Hướng dẫn giải:

+ Đồ thị nhận $x = 2$ làm tiệm cận đứng và $y = x + 3$ làm tiệm cận xiên.

Gọi M $\left(x_0, x_0 + 3 + \frac{1}{x_0 - 2}\right)$ là điểm trên đồ thị.

Khoảng cách từ m đến tiệm cận đứng $d_1 = |x_0 - 2|$.

Khoảng cách từ m đến tiệm cận xiên $d_2 = \frac{|x_0 - y_0 + 3|}{\sqrt{2}}$.

$$\Rightarrow d_2 = \frac{\left[x_0 + 3 - (x_0 + 3) + \frac{1}{x_0 - 2}\right]}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{|x_0 - 2|}$$

$$\text{Do đó } d_1 d_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\text{đpcm}).$$

4.3. Bài tập tự luyện:

Bài 1: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ (H)

Và đường thẳng $y = -x + m$.

a) Tìm m để (T) cắt (H) tại 2 điểm A và B đối xứng nhau qua đường $y = x + 3$ (D).

b) Tìm k sao cho trên (H) có 2 điểm P và Q thỏa mãn:
$$\begin{cases} x_P + y_P = k \\ x_Q + y_Q = k \end{cases}$$

Chứng minh khi đó P và Q ở cùng 1 nhánh của đồ thị.

Bài 2: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x - 5}{x - 2}$ (c).

Tìm trên 2 nhánh đồ thị hai điểm A, B sao cho AB ngắn nhất.

Bài 3: Cho hàm số $y = x^4 + ax^2 + b$. Giả sử đồ thị cắt Ox tại 4 điểm có hoành độ tạo thành cấp số cộng. Chứng minh $9a^2 - 100b = 0$.

Bài 4: Tìm m để đồ thị hàm số :

$$y = (m + 1) \left(\frac{x^2}{x^2 + 1} \right)^2 - 3m \left(\frac{x^2}{x^2 + 1} \right) + 4m \text{ cắt ox tại ít nhất 1 điểm.}$$

Bài 5: Cho hàm số $y = \frac{x - 1}{x + 1}$. Tìm điểm m trên đồ thị sao cho tổng khoảng cách từ m đến 2 trục tọa độ là nhỏ nhất.

4.4. Hướng dẫn đáp số :

Bài 1: Với (D) là đường thẳng vuông góc với T_1 , phương trình của

$$(D): y = x + 3.$$

Để (T) cắt (H) tại A, B, đối xứng nhau qua (D) thì trung điểm I của AB phải ở trên (D), với $I \left(\frac{m + 3}{4}, \frac{3m - 3}{4} \right)$

Ta được $m = 9$.

b) – Để ý P và Q cùng ở trên đường thẳng $y = -x + k$.

– Viết phương trình hoành độ giao điểm.

Đáp số: $k < 1 - 2\sqrt{2}$ và $k > 1 + 2\sqrt{2}$.

Bài 2: Xem bài 6.

Bài 4: Đặt $t = \frac{x^2}{x^2 + 1}$, Đáp số $-\frac{1}{2} < m \leq 0$.

Bài 5: Gọi $M(x, y)$ thì khoảng cách từ m đến Ox, Oy lần lượt là $|x|, |y|$. Do đó ta phải tìm M thuộc (c) để $d = |x| + |y|$ nhỏ nhất.

Để $M(0, -1)$ thuộc (c) có $d = 1$ nên ta chỉ cần xét các điểm $M(x, y)$ với $|x| < 1$ và $|y| < 1$, khi đó :

$$d = x - \frac{x-1}{x+1} = x - 1 + \frac{2}{x+1} = x+1 + \frac{2}{x+1} - 2$$

$$d \geq 2\sqrt{2} - 2$$

$$d \min \Leftrightarrow x = \sqrt{2} - 1, y = 1 - \sqrt{2}.$$

Do đó khi $M(\sqrt{2} - 1, 1 - \sqrt{2})$ thì $d \min$.

V. Quỹ tích (tập hợp điểm)

5.1 Tóm tắt lý thuyết:

❖ Quỹ tích điểm xác định

PP: Để tìm quỹ tích của một điểm ta dựa vào tính chất của điểm đó để tìm tọa độ của nó dạng tham số:

$$\begin{cases} x = f(m) \\ y = g(m) \end{cases}$$

Sau khi khử tham số m suy ra hệ thức giữa x, y để tìm phương trình quỹ tích
– Dựa vào điều kiện tồn tại điểm đó để giới hạn quỹ tích (nếu có).

❖ Quỹ tích điểm không xác định

PP: Để tìm quỹ tích của một điểm khi không thể tìm được tọa độ điểm đó theo tham số ta có thể:

+ Gọi điểm quỹ tích là $M(x_0, y_0)$.

- + Dựa vào tính chất của M (giả thiết) để suy ra hệ thức giữa x_0, y_0 dạng $F(x_0, y_0) = 0$.
- + Giới hạn (nếu có).

5.2. Bài tập áp dụng

Bài 1: Cho hàm số: $y = x^3 + 3x^2 + mx + 1$ (Cm)

Chứng minh rằng mọi m thuộc $\mathbb{R}$ thì (Cm) luôn luôn cắt đồ thị hàm số:

$y = x^3 + 2x^2 + 7$ tại hai điểm phân biệt A và B. Hãy tìm quỹ tích trung điểm I của AB.

Hướng Dẫn Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 + 3x^2 + mx + 1 = x^3 + 2x^2 + 7 \Leftrightarrow x^2 + mx - 6 = 0.$$

Ta có: $\Delta = m^2 + 24 > 0$ với mọi m thuộc $\mathbb{R}$, nên (Cm) luôn luôn cắt đồ thị $y = x^3 + 2x^2 + 7$ tại hai điểm phân biệt A, B.

$$\text{Ta có: } x_1 = \frac{x_A + x_B}{2} = -\frac{m}{2}.$$

$$y_1 = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{x_A^3 + x_B^3 + 2(x_A^2 + x_B^2) + 14}{2}$$

$$= \frac{1}{2} [s^3 - 3ps + 2s^2 - 4p + 14]$$

$$y_1 = \frac{1}{2} [-m^3 + 2m^2 - 18m + 38]$$

$$\text{Khử tham số } m = -2x_1 \Rightarrow y_1 = 4x_1^3 + 4x_1^2 + 18x_1 + 19.$$

Vậy quỹ tích trung điểm I là đường cong: $y = 4x^3 + 4x^2 + 18x + 19$.

Bài 2: Cho hàm số $y = \frac{2x^2 + (m-2)x}{x-1}$.

Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu, khi đó tìm quỹ tích các điểm cực trị khi m thay đổi.

Hướng Dẫn Giải:

$$\text{Ta có } y' = \frac{2(x-1)^2 - m}{(x-1)^2}$$

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi y' đổi dấu 2 lần $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow m > 0$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - \frac{\sqrt{2m}}{2} & (CD) \\ x_2 = 1 + \frac{\sqrt{2m}}{2} & (CT) \end{cases}$$

Quỹ tích điểm cực đại

$$M \left(1 - \frac{\sqrt{2m}}{2}, 4 \left(1 - \frac{\sqrt{2m}}{2} \right) + m - 2 \right)$$

$$\text{Khử } m \begin{cases} \sqrt{2m} = 2 - 2x \\ y = 4x + m - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ y = 2x^2 \end{cases}$$

Vậy quỹ tích điểm cực đại là parabol $y = 2x^2$ với $x < 1$.

$$\text{Quỹ tích điểm cực tiểu } N \left(1 + \sqrt{\frac{2m}{2}}, 4 \left(1 + \sqrt{\frac{2m}{2}} \right) + m - 2 \right).$$

Tương tự ta có quỹ tích các điểm N là parabol: $y = 2x^2$ với $x > 1$.

Bài 3: Cho hàm số $y = x^3 + m(x^2 - 1)$.

a) Chứng minh khi m thay đổi các đồ thị hàm số trên luôn luôn qua hai điểm cố định A và B.

b) Viết phương trình tiếp tuyến tại A và tại B và tìm quỹ tích giao điểm của 2 tiếp tuyến trên khi m thay đổi.

Hướng Dẫn Giải:

- a. Tọa độ điểm cố định của đồ thị là nghiệm của phương trình: $\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x^3 = y \end{cases}$

Do đó 2 điểm cố định của đồ thị là A (1,1) và B (-1, -1).

$$f(x) = 3x^2 + 2mx \Rightarrow f'(1) = 3 + 2m$$

$$f'(-1) = 3 - 2m.$$

Tiếp tuyến tại A là: $y = (3 + 2m)x - 2 - 2m$.

Tiếp tuyến tại B là: $y = (3 - 2m)x + 2 - 2m$.

Giao điểm hai tiếp tuyến là:
$$\begin{cases} x = \frac{1}{m} & (m \neq 0) \\ y = (3 + 2m) \frac{1}{m} - 2 - 2m \end{cases}$$

Khử m ta được: $y = \frac{3x^2 - 2}{x}$.

Vậy quỹ tích giao điểm của hai tiếp tuyến là đường cong $y = \frac{3x^2 - 2}{x}$.

Bài 4: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ tìm quỹ tích các điểm trong mặt phẳng mà từ đó vẽ được 2 tiếp tuyến vuông góc đến đồ thị trên.

Hướng Dẫn Giải:

Gọi $M(x_0, y_0)$ là điểm trong quỹ tích, cần tìm đường thẳng qua

$M: y - y_0 = k(x - x_0)$

Điều kiện tiếp xúc:

$$\begin{cases} \frac{x^2 + 1}{x} = k(x - x_0) + y_0 & (1) \\ 1 - \frac{1}{x^2} = k & (2) \end{cases}$$

Để qua M có 2 tiếp tuyến vuông góc với nhau qua M ta phải có:

$$kk' = -1 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{x_1^2}\right) \left(1 - \frac{1}{x_2^2}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}\right) + \frac{1}{(x_1 x_2)^2} = -1$$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{(x_1 x_2)^2} = 0 \Leftrightarrow 2(x_1 x_2)^2 - (x_1 + x_2)^2 + 2(x_1 x_2) + 1 = 0 (*)$$

Thay (2) vào (1) ta được $(x_0 - y_0)x^2 + 2x - x_0 = 0$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = \frac{-2}{x_0 - y_0}; \quad x_1 x_2 = \frac{-x_0}{x_0 - y_0}$$

Do đó:

$$(*) \Leftrightarrow 2 \left(\frac{-x_0}{x_0 - y_0} \right)^2 - \left(\frac{4}{x_0 - y_0} \right)^2 + 2 \left(\frac{-x_0}{x_0 - y_0} \right) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x_0^2 - 4 - 2x_0(x_0 - y_0) + (x_0 - y_0)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = 4.$$

Giới hạn: x_0 khác 0, y_0 khác x_0

Do đó quỹ tích của M là đường tròn tâm O bán kính $R = 2$ loại trừ $(0, 2)$, $(0, -2)$ và $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Bài 5: Cho hai điểm A, B di động trên parabol: $y = x^2$ sao cho $AB = 2$. Tìm quỹ tích trung điểm I của AB.

Hướng dẫn giải:

Gọi $A(x_A, x_A^2)$, $B(x_B, x_B^2)$ ở trên (p)

$$AB = 2 \Leftrightarrow 4 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (x_B - x_A)^2 + (x_B^2 - x_A^2)^2$$

$$\Leftrightarrow 4 = (x_B - x_A)^2 [1 + (x_A + x_B)^2] \quad (1)$$

Gọi $I(x_1; y_1)$ là trung điểm AB, ta có :

$$x_A + x_B = 2x_1$$

$$y_1 = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{(x_A + x_B)^2 - 2x_A x_B}{2}$$

$$\Rightarrow 2x_A x_B = (x_A + x_B)^2 - 2y_1 = 4x_1^2 - 2y_1.$$

$$(1) \Rightarrow 4 = [(x_A + x_B)^2 - 4x_A x_B] [1 + (x_A + x_B)^2]$$

$$\Rightarrow 4 = [4x_1^2 - 8x_1^2 + 4y_1] [1 + 4x_1^2]$$

$$\Rightarrow y_1 = x_1^2 + \frac{1}{4x_1^2 + 1}.$$

Vậy quỹ tích của I là đường cong $y = x^2 + \frac{1}{4x^2 + 1}$.

5.3. Bài tập tự luyện:

Bài 1: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 12(m-1)x + 6$.

a. Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu.

b. Khi m thay đổi, tìm quỹ tích các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị.

Bài 2: Cho hàm số $y = 2x + m + \frac{4}{mx - 2}$, chứng minh giao điểm của 2 tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị.

Bài 3: Cho hàm số $y = -\frac{x^3}{m} + 3mx^2 - 2$ ($m \neq 0$)

a. Tìm m để $I(1,0)$ là tâm đối xứng.

b. Cho $m = 1$, tìm quỹ tích các điểm trên đường $y = 2$ mà qua đó có 3 tiếp tuyến đến đồ thị.

Bài 4: Cho parabol $y = x^2 - 2mx + 2m - 1$ (p)

a. Tìm m để (p) cắt Ox tại A khác B .

b. Gọi $C = P \cap Oy$. Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác ABC .

Bài 5: Cho $A(3,5)$ Tìm quỹ tích các điểm M sao cho khoảng cách từ M đến A và đến Ox bằng nhau.

Bài 6: Cho hàm số: $y = x^3 + (m + |m|)x^2 - 4x - 4(m + |m|)$.

a. Tìm m để đồ thị tiếp xúc Ox .

b. Tìm quỹ tích điểm uốn khi n_0 thay đổi.

5.4. Hướng dẫn – đáp số

Bài 1:

a) $y' = 6x^2 - 6(m+1)x + 12(m-1)$

$$\Delta' = 9(m-3)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 3$$

Vậy khi m khác 3 thì $y' = 0$ có hai nghiệm $\Leftrightarrow y'$ đổi dấu 2 lần, hàm số có cực đại, cực tiểu.

b) Nếu: $m < 3$ thì $M(m-1, f(m-1))$ là điểm cực đại.

$N(2, f(2))$ là điểm cực tiểu.

Quỹ tích M là đường cong $y = -x^3 + 6x^2 + 6$ với $x < 2$.

Quỹ tích N là đường thẳng $x = 2$ với $y < 22$.

Nếu $m > 3$ thì $M(m-1, f(m-1))$ là cực tiểu và $N(2, f(2))$ là cực đại.

Do đó :

Quỹ tích của cực đại là đường thẳng $x = 2$ với $y > 22$.

Quỹ tích của cực tiểu là đường cong $y = -x^3 + 6x^2 + 6$ với $x < 2$.

VI. Điểm cố định liên quan với đường cong

6.1 Tóm tắt lý thuyết:

a. Điểm cố định mà mọi đồ thị của đường cong đều đi qua

PP. Biến đổi $y = f(x, m)$ về dạng $mA + b = 0$

+ Gọi (x_0, y_0) là điểm cố định mà mọi đồ thị đều đi qua thì (x_0, y_0) là nghiệm của

$$\begin{cases} A = 0 & (*) \\ B = 0 \end{cases}$$

+ Giải hệ (*) tùy theo số nghiệm suy ra số điểm cố định.

b) Điểm cố định mà mọi đồ thị của đường cong đều không đi qua.

PP. Biến đổi $y = f(x, m)$ về dạng $mA + B = 0$ (hoặc $m^2A + mB + C = 0$)

+ Gọi (x_0, y_0) là điểm cố định mà mọi đồ thị đều đi qua thì (x_0, y_0) là nghiệm của

$$\begin{cases} A = 0 \\ B \neq 0 \end{cases} \quad (\text{hoặc } \Delta < 0) \quad (*)$$

+ Giải ta suy ra tập hợp các điểm (x_0, y_0) .

c. Điểm cố định mà đồ thị chỉ đi qua với một số giá trị của tham số.

PP: Đồ thị $y = f(x, m)$ qua $M(x_0, y_0)$ thì $y_0 = f(x_0, y_0)$ có nghiệm, số đồ thị qua M chính là số nghiệm theo ẩn m của phương trình $y_0 = f(x_0, m)$.

6.2. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 2}{mx - 1}$ ($m \neq \pm 1$).

Chứng minh rằng khi m thay đổi các đồ thị hàm số trên luôn luôn đi qua 3 điểm cố định, tìm các điểm đó.

Hướng Dẫn Giải:

Gọi (x_0, y_0) là điểm cố định mà mọi đồ thị hàm số trên đều đi qua, ta có

$$y_0 = \frac{x_0^2 + mx_0 - 2}{mx_0 - 1} \quad (\text{với mọi } m \neq \pm 1).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} mx_0 - 1 \neq 0 \\ m(x_0, y_0 - x_0) - y_0 - x_0^2 + 2 = 0 \quad \forall m \neq \pm 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0(y_0 - 1) = 0 \\ y_0 = 2 - x_0^2 \end{cases}$$

Vậy khi m thay đổi mọi đồ thị hàm số trên luôn luôn đi qua 3 điểm cố định $(0,2), (1,1), (-1,1)$.

Bài 2: Cho hàm số $y = (m - 2)x^3 + (3 - 3m)x + 3 - m$. Chứng minh rằng với mọi m khác 0, các đồ thị hàm số trên luôn luôn qua 3 điểm cố định thẳng hàng.

Hướng Dẫn Giải:

Tọa độ (x_0, y_0) của điểm cố định mà mọi đồ thị đều đi qua là nghiệm

$$\text{của hệ: } \begin{cases} x^3 - 3x - 1 = 0 & (1) \\ y + 2x^3 - 3x - 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

Ta chứng minh (1) có 3 nghiệm bằng cách xét hàm số $y = x^3 - 3x - 1$ vì đồ thị này cắt Ox tại 3 điểm phân biệt (học sinh tự khảo sát).

$$\text{Ta có (1)} \Rightarrow x_0^3 = 3x_0 + 1$$

$$(2) \Rightarrow y_0 = -2(3x_0 + 1) + 5x_0 + 3 = -3x_0 + 1$$

Do đó 3 điểm cố định ở trên đường thẳng $y = -3x + 1$ (đpcm).

Bài 3: Cho hàm số $y = mx^3 + (1 - m)x$ (*).

Tìm trong mặt phẳng các điểm mà mọi đồ thị của hàm số trên đều không đi qua khi m thay đổi.

Hướng Dẫn Giải:

$$\text{Ta có: (*)} \Leftrightarrow m(x^3 - x) + x - y = 0.$$

Đồ thị không qua M (x_0, y_0) mọi m thuộc R nên phương trình trên vô nghiệm với mọi m.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^3 - x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 0, x_0 = \pm 1 \\ x_0 - y_0 \neq 0 \Rightarrow y_0 \neq x_0 \end{cases}$$

Vậy: Tập hợp các điểm cố định mà mọi đồ thị đều không đi qua ở trên 3 đường thẳng song song với Oy, lần lượt có phương trình: $x = 0, x = -1, x = 1$ loại trừ 3 điểm $(0,0), (1,1), (-1,-1)$.

Bài 4: Tìm trên parabol $y = x^2$ các điểm mà mọi đồ thị hàm số $y = -mx^3 - 2mx^2 + (m+1)x + 2m$ không bao giờ đi qua.

Hướng dẫn giải:

Gọi $M(x_0, x_0^2)$ thuộc (P) là điểm mà mọi đồ thị hàm số trên đều không đi qua thì x_0 là nghiệm của:

$$\begin{cases} -x_0^3 - 2x_0^2 + x_0 - 2 = 0 \\ x_0 - x_0^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow A(-1, 1), B(-2, 4).$$

Bài 5: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - mx - m^2}{x + m} (C_m)$

Chứng minh rằng mọi điểm trong mặt phẳng mà không ở trên trục Oy thì luôn luôn có 2 đồ thị của họ (C_m) đi qua.

Hướng dẫn giải:

Gọi $M(x_0, y_0)$ với x_0 khác 0 là điểm không ở trên Oy, (C_m) đi qua M

$$\Leftrightarrow y_0 = \frac{x_0^2 - mx_0 - m^2}{x_0 + m}$$

$$m \neq -x_0$$

$$m^2 + (x_0 + y_0)m + x_0y_0 - x_0^2 = 0 \quad (1).$$

Xét $\Delta = y_0^2 - 2x_0y_0 + 5x_0^2$ ta có $S' = -4x_0^2 < 0$ với mọi x_0 khác 0.

Do đó $\Delta > 0$ với mọi y_0 thuộc $\mathbb{R} \Rightarrow (1)$ có 2 nghiệm với mọi x_0 khác 0.

Vậy các điểm không ở trên Oy thì luôn luôn có 2 đồ thị đi qua.

6.3. Bài Tập Tự Luyện :

Bài 1: Cho hàm số $y = \frac{mx^2 - (m+1)x + 1}{x - m}$.

Chứng minh khi m thay đổi các đồ thị trên luôn luôn qua 1 điểm cố định và tiếp xúc lẫn nhau tại 1 điểm cố định khác.

Bài 2: Cho hàm số $y = \frac{mx - p}{px + m + 1} (*)$

Tìm P để mọi đồ thị hàm số trên luôn luôn đi qua một điểm cố định duy nhất.

Bài 3: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 8}{x - m}$.

Tìm trong mặt phẳng các điểm mà mọi đồ thị đều không đi qua với mọi m khác ± 2 .

Bài 4: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (2m^2 - 1)x + m^2 - 5m + 1$.

Tìm trên đường $x = 1$ các điểm mà mọi đồ thị hàm số trên đều không đi qua.

Bài 5: Cho hàm số $y = \frac{mx^2 - (m^2 + m - 1)x + m^2 - m + 2}{x - m}$.

Chứng minh rằng mỗi điểm ở bên phải đường thẳng $x = 1$ luôn luôn có 2 đồ thị của hàm số trên đi qua.

Bài 6: Cho hàm số $y = \frac{2mx + m^2 + 2m}{2(x + m)}$

Tìm trên mặt phẳng các điểm mà qua đó có đúng 1 đồ thị hàm số trên đi qua.

6.4. Hướng dẫn – đáp số :

Bài 1:

+ Đồ thị qua $M(1,0)$ và $N(-1, -2)$.

+ Ta có $f'(1) = -1$ với mọi m thuộc $\mathbb{R} \Rightarrow$ các đồ thị tiếp xúc lẫn nhau tại $M(1,0)$.

Bài 2: Tọa độ điểm cố định là nghiệm của $\begin{cases} y = x & (*) \\ Px^2 + x + P = 0 \end{cases}$

Để chỉ có 1 điểm cố định duy nhất thì $(*)$ chỉ có 1 nghiệm $\Leftrightarrow P = 0$ và

$$P = \pm \frac{1}{2}.$$

Bài 3: Tọa độ điểm cố định mà mọi đồ thị đều không đi qua là nghiệm của

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 - xy - 8 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x \neq \pm 2 \end{cases}$$

Vậy các điểm mà mọi đồ thị đều không đi qua ở trên đường thẳng $y = -x$ loại trừ các điểm $(2, -2)$, và $(-2, 2)$.

Bài 4: Đồ thị không qua $A(1, y_0) \Leftrightarrow 3m^2 - 8m + 1 - y_0 = 0$ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow y_0 < \frac{-13}{3}.$$

Vậy $A(1, y_0)$ với $y_0 < \frac{-13}{3}$ thì mọi đồ thị đều không đi qua.

Bài 5: Biến đổi tương đương m khác x và

$$(1-x)m^2 + (x^2 - x - 1 + y)m + x + 2 - xy = 0.$$

$$\Delta = (x^2 - x + 1 + 4)^2 + 8(x - 1).$$

$$x > 1 \Rightarrow \Delta > 0.$$

Bài 6: Biến đổi tương đương $\begin{cases} m \neq -x_0 & (1) \\ m^2 + 2(1+x_0-y_0)m - 2x_0y_0 = 0 & (2) \end{cases}$

Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow (2)$ có nghiệm kép khác $-x_0$

(2) có hai nghiệm trong đó có một nghiệm là $-x_0$

Đáp số :

+ **M** ở trên đường tròn $I(-1, 1)$ bán kính $R = 1$ loại trừ: $(0, 1)$, $(-2, 1)$

+ **Hoặc M** ở trên các đường thẳng $x = 0$, $x = -2$ loại: $(0, 1)$, $(-2, 1)$.

B. Trắc nghiệm về các vấn đề khảo sát hàm số

Câu 1: Cho hàm số: $y = \frac{x^2 - x - 11}{x + 3}$. Xét các mệnh đề sau:

I: $y = x - 4$ là tiệm cận xiên của đồ thị.

II: Đồ thị đối xứng qua điểm $I(-3, -7)$.

III. Đồ thị không cắt trục Ox .

Mệnh đề nào là đúng:

- A. I và II B. II và III C. Chỉ có I D. I và III.

Câu 2: Số cặp điểm A,B trên đồ thị hàm số: $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$ mà tiếp tuyến tại A và tại B vuông góc nhau là:

A. Vô số cặp B. Chỉ 1 cặp

C. Không có cặp nào D. Có 2 cặp.

Câu 3: Hai đồ thị hàm số: $y = x^3 - 5x$ và $y = x^2 + 3$ tiếp xúc nhau tại điểm nào dưới đây?

- A. $(-1, 4)$ B. $(3, 12)$ C. $\left(\frac{5}{3}, \frac{52}{9}\right)$ D. $\left(-1, \frac{5}{3}\right)$.

Câu 4: Điểm nào dưới đây là tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$:

- A. $(1, 0)$ B. $(0, 1)$ C. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ D. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}(c)$.

Số điểm trên đồ thị (c) có tọa độ (x,y) đều nguyên là:

- A. 2 B. 1 C. 0 D. 3.

Câu 6: Đồ thị hàm số $y = f(x + a)$ ($a > 0$) được suy ra từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ bằng cách tịnh tiến theo vectơ nào dưới đây:

- A. $\vec{u} = (a, 0)$ B. $\vec{u} = (0, a)$ C. $\vec{u} = (-a, 0)$ D. $\vec{u} = (0, -a)$.

Câu 7: Đồ thị hàm số $y = b + f(x - a)$ ($a, b > 0$). suy ra từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ bằng cách tịnh tiến theo vectơ nào dưới đây:

- A. $\vec{v} = (a, -b)$ B. $\vec{v} = (-a, b)$ C. $\vec{v} = (a, b)$ D. $\vec{v} = (-a, -b)$.

Câu 8: Cho hàm số $y = -x^4 + mx^2 + 1 - m$ (C_m). Khi m thay đổi thì số điểm cố định của (C_m) là:

- A. 1 B. 2 C. 3 D. Không có.

Câu 9: Cho hàm số $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. Xét các mệnh đề:

I. Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

II. Hàm số là lẻ.

III. Hàm số là chẵn.

IV. Đạo hàm là $y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Mệnh đề nào là sai:

- A. I và II B. Chỉ có II C. Chỉ có III D. II và IV.

Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{(2m-5)x^2}{3} - mx - \frac{5}{3}m$. Khi m thay đổi thì

đồ thị qua điểm nào dưới đây: $M\left(-1, -\frac{7}{3}\right), N\left(0, \frac{5}{3}\right), P\left(\frac{5}{2}, 0\right), Q\left(1, \frac{7}{3}\right)$.

A. Chỉ có điểm M

B. Hai điểm P và Q

C. Chỉ điểm P

D. Hai điểm M và P.

Câu 11: Cho hàm số $y = x^4 + mx^2 - m - 1$. Xét các mệnh đề:

I: Đồ thị qua hai điểm A(1,0) và B(-1,0) khi m thay đổi.

II: Với $m = -1$ thì tiếp tuyến tại A(1,0) song song với $y = 2x$.

III: Đồ thị đối xứng qua trục Oy.

Mệnh đề nào là đúng:

A. Chỉ có III

B. I và III

C. II và III

D. I, II và III.

Câu 12: Cho hàm số $y = (x+1)(x-2)^2$ (C). Đường thẳng (d) đi qua A (2,0) có hệ số góc k . Để (d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt thì giá trị của k là:

A. $k = -\frac{9}{4}$

B. $k > -\frac{9}{4}$

C. $k > -\frac{9}{4}$ và $k \neq 0$

D. $k \leq -\frac{9}{4}$.

Câu 13: Cho hàm số: $y = \frac{-2x-4}{x+1}$. Đường thẳng (d) qua gốc O cắt đồ thị

hàm số trên tại A và B đối xứng qua gốc O có phương trình là:

- A. $y = 2x$ B. $y = -2x$ C. $y = -x$ D. $y = -\frac{1}{2}x$.

Câu 14: Cho hàm số: $y = 2x^3 + 2(6m-1)x^2 + 3(2m-1)x - 3(1+2m)$.

Để đồ thị cắt Ox tại A, B, C (mà $x_A + x_B + x_C = -5$) thì giá trị của m là:

- A. $m = -1$ B. $m = 1$ C. $m = \frac{1}{2}$ D. $m = -\frac{1}{2}$.

Câu 15: Cho hàm số $y = mx^3 + 2mx^2 - (m+3)x - 2(m-2)$. Khi m thay đổi thì các điểm cố định của đồ thị ở trên đường nào dưới đây:

- A. $y = 3x$ B. $y = 3x - 4$ C. $y = -4$ D. $y = -3x + 4$.

Câu 16: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ (c). Trên đoạn $[-2, 2]$ đồ thị cắt Ox tại mấy điểm

- A. 2 B. 3 C. 1 D. 0.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị: (c). Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ được suy ra từ (c) bằng cách nào dưới đây :

- A. Xoá bỏ phần đồ thị (c) ở dưới Ox và giữ nguyên phần còn lại.
B. Xoá bỏ phần đồ thị (c) ở dưới Ox, vẽ thêm phần đối xứng còn lại của (c) qua Ox.
C. Phần đồ thị (c) ở trên Ox thì giữ nguyên, phần đồ thị dưới Ox thay bằng đối xứng qua trục Ox.
D. Xoá bỏ phần đồ thị (c) dưới Ox, phần còn lại vẽ đối xứng qua trục Oy.

Câu 18: Cho hàm số: $y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}$ (c). Hãy chọn mệnh đề sai dưới đây :

- A. Đồ thị có điểm cực đại $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ và cực tiểu $(1, 0)$.
B. Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ và tiếp xúc Ox tại $(1, 0)$.
C. Hàm số tăng trên $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

D. Điểm $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ là điểm uốn của đồ thị.

Câu 19: Cho hàm số: $y = \frac{1}{4}x^2(x+6)$. Để đường thẳng $y = -\frac{9}{4}x + b$ là tiếp tuyến của đồ thị thì giá trị của b là:

A. $b = 0$ Hay $b = -1$

B. $b = 1$ hay $b = 2$

C. $b = \frac{1}{2}$

D. $b = -\frac{1}{2}$.

Câu 20: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ (c). Để đường thẳng $y = kx + 1$ cắt (c) tại 2 điểm ở 2 nhánh của đồ thị (P) thì giá trị của k là:

A. $k < 1$

B. $|k| < 1$

C. $k > 1$

D. $|k| > 1$.

Câu 21: Cho hàm số $y = 4x^3 - 3x + 1$ (c). Tiếp tuyến với (c) tại điểm A(1,2) cắt (c) tại điểm nào dưới đây:

A. (0,1)

B. (-2, -25)

C. (2,27)

D. (-1,0).

Câu 22: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3ax^2 + a^3$. Để hàm số có 2 điểm cực đại cực tiểu đối xứng nhau qua đường $y = x$ thì giá trị của a là:

A. $a = 0$

B. $a = \pm 2$

C. $a = \frac{1}{2}$

D. $a = \pm 1$.

Câu 23: Cho hàm số $y = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$ (c). Đường thẳng nào dưới đây là tiếp tuyến với (c) tại giao điểm của (c) với Oy:

A. $y = x$

B. $y = -x$

C. $y = x + 1$

D. $y = -x + 1$.

Câu 24: Cho hàm số $y = \frac{-x+3}{2x-1}$ (c). Số điểm (x,y) trên đồ thị (c) mà x,y đều nguyên là:

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

Câu 25: Cho hàm số $y = (x+1)(x-2)^2$. Khoảng cách giữa hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số là:

A. $2\sqrt{5}$

B. 2

C. 4

D. $5\sqrt{2}$.

C. Hướng dẫn giải – trắc nghiệm

Câu 1: $y = \frac{x^2 - x - 11}{x + 3} = x - 4 + \frac{1}{x + 3}$.

. Tiệm cận đứng $x = -3$, tiệm cận xiên $y = x - 4$: (I) đúng.

. Tâm đối xứng $I(-3, -7)$: (II) đúng.

. $y = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0$ có 2 nghiệm: Đồ thị cắt Ox. Chọn câu A.

Câu 2: $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Mọi điểm A, B trên đồ thị thì $f'(x_A), f'(x_B) > 0$ nên không có cặp điểm nào mà tiếp tuyến vuông góc nhau. Chọn câu C.

Câu 3: Điều kiện tiếp xúc của 2 đồ thị $\begin{cases} x^3 - 5x = x^2 + 3 \\ 3x^2 - 5 = 2x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0 \\ 3x^2 - 2x - 5 = 0 \end{cases}$. Thay tọa độ các điểm và chọn A(-1, 4).

Câu 4: Đếm uốn là tâm đối xứng của đồ thị.

$y''' = 12x - 6; y''' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$. Tâm đối xứng của đồ thị là

$C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Chọn câu C.

Câu 5: $y = x + \frac{1}{x-1}$

$x, y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-1 = \pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, y=3 \\ x=0, y=-1 \end{cases}$ có 2 điểm trên (c) có

tọa độ đều nguyên là: (2, 3), (0, -1). Chọn câu A.

Câu 6: Đồ thị $y = f(x+a)$ được suy ra từ đồ thị $y = f(x)$ bằng cách tịnh tiến theo trục Ox và bên trái $|a|$ đơn vị nghĩa là tịnh tiến theo vector

$\vec{v} = (-a, 0)$. Chọn câu C.

Câu 7: Đồ thị hàm số $y = b + f(x - a)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ bằng cách: Dời qua phải (theo x) đơn vị rồi dời lên trên b đơn vị, nghĩa là tính tiến theo vectơ $\vec{v} = (a, b)$.

Câu 8: $(C_m) \Leftrightarrow m(x^2 - 1) + 1 - x^4 - y = 0$. Toạ độ điểm cố định (C_m) thoả

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ 1 - x^4 - y = 0 \end{cases}$$

Hệ có 2 nghiệm nên có 2 điểm cố định của C_m : Chọn câu B.

Câu 9:

$$\cdot \sqrt{1+x^2} > |x| \Rightarrow x + \sqrt{1+x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : D_y = \mathbb{R}$$

$$\cdot f(-x) = \ln(-x + \sqrt{1+x^2}) = \ln\left(\frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}\right) = -\ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$= -f(x) : \text{hàm số lẻ.}$$

$$\cdot y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Chỉ có III là sai. Chọn câu C.

Câu 10: Toạ độ điểm cố định thoả $\begin{cases} 2x^2 - 3x - 5 = 0 \\ 2x^3 - 5x^2 - 3y = 0 \end{cases}$

Giải hệ được $M\left(-1, -\frac{7}{3}\right)$ và $P\left(\frac{5}{2}, 0\right)$. Chọn câu D.

Câu 11: Thay toạ độ A và B vào (c) đều thoả, (I): đúng.

$$\cdot m = -1 \Rightarrow f'(1) = 2 = k. \text{ Tiếp tuyến tại A có hệ số góc}$$

$k = 2$ nên song song với đường $y = 2x$, II : đúng.

$\cdot$ Hàm số $y = f(x)$ là chẵn nên đồ thị đối xứng qua Oy (III: đúng).

Chọn câu D.

Câu 12: Phương trình của (d): $y = k(x - 2)$.

$$\cdot \text{Phương trình hoành độ giao điểm: } (x - 2)(x^2 - x - k - 2) = 0.$$

$$(d) \text{ cắt } (c) \text{ tại 3 điểm phân biệt khi: } x^2 - x - k - 2 = 0$$

$$\text{Có 2 nghiệm phân biệt khác 2} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2 - 2 - k \neq 0 \\ \Delta = 9 + 4k > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow k > -\frac{9}{4} \text{ và } k \neq 0. \text{ Chọn câu C.}$$

Câu 13: Phương trình của (d): $y = kx$.

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm: } \frac{-2x}{x+1} = kx$$

$$\Leftrightarrow kx^2 + (k+2)x + 4 = 0 \quad (x \neq -1).$$

Để có 2 giao điểm đối xứng qua gốc O thì phải có

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ \frac{x_1 + x_2}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow k = -2$$

Vậy phương trình của (d) là $y = -2x$. Chọn câu B.

Câu 14: Phương trình hoành độ giao điểm với Ox:

$$2x^3 + 2(6m-1)x^2 + 3(2m-1)x = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2 + 12mx + 3(1+2m)) = 0$$

$$x_A + x_B + x_C = -5 \Leftrightarrow 2x^2 + 12mx + 3(1+2m) = 0 \text{ có } S = -6$$

$$\Leftrightarrow -6m = -6 \Leftrightarrow m = 1 \text{ (có thể dùng định lí Vi-et):}$$

$$x_A + x_B + x_C = 1 - 6m = -5 \Leftrightarrow m = 1. \text{ Chọn câu B.}$$

Câu 15: Toạ độ điểm cố định thỏa: $\begin{cases} x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0 \\ 3x - 4 - y = 0 \end{cases}$

Do đó các điểm cố định ở trên đường thẳng $y = 3x - 4$. Chọn câu B.

Câu 16: $y' = -3x^2 + 3; y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Hàm số nhận điểm (1,3) làm điểm cực đại và điểm (-1, -1) làm điểm cực tiểu.

$$f(-2) = 3 \text{ và } f(2) = -1. \text{ Do đó đồ thị cắt Ox tại 3 điểm. Chọn câu B.}$$

Câu 17: Dựa vào tính chất của $y = |f(x)|$. Chọn câu C.

Câu 18: $y' = 2x^2 - 2x; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hay } x = 1$, kiểm tra các điều kiện A, B, C đều đúng.

$$y'' = 4x - 2; y'' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}. \text{ Điểm uốn là } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right). \text{ D sai. Chọn câu D.}$$

Câu 19: $f'(x) = \frac{1}{4}(3x^2 + 12x)$. Đường thẳng $y = \frac{-9}{4}x + b$ là tiếp tuyến của

đồ thị tại $x = x_0$ khi $f'(x_0) = -\frac{9}{4} \Leftrightarrow 3x_0^2 + 12x_0 - 9 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$

hay $x_0 = -3$; Có hai tiếp tuyến là: $y = -\frac{9}{4}x - 1$ và $y = -\frac{9}{4}x$, vậy có 2 giá

trị của b là $b = -1, b = 0$. Chọn câu A.

Câu 20: Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = kx + 1 \Leftrightarrow (k - 1)x^2 + (3 - k)x - 3 = 0 \quad (x \neq 1). \quad \text{Để đường}$$

thẳng cắt (c) tại 2 điểm ở nhánh của đồ thị thì phải có:
 $(k - 1)f(1) < 0 \Leftrightarrow k > 1$. Chọn câu C.

Câu 21: $f'(x) = 12x^2 - 3 \Rightarrow f'(1) = 9$.

Tiếp tuyến tại A: $y = 9x - 7$.

Giao điểm với (C) có hoành độ thỏa: $4x^3 - 3x + 1 = 9x - 7$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2(4x + 8) = 0$$

$x = -2 \Rightarrow y = -25$ (Có thể thay tọa độ các điểm vào $y = 9x - 7$ để chọn).

Chọn câu B.

Câu 22: $y' = 6x(x - a); y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = a$. Để có 2 điểm cực trị thì
 $a \neq 0$, tọa độ các điểm cực trị là $A(0, a^3)$ và $B(a, 0)$. Để A, B đối xứng
 nhau qua đường thẳng $y = x$ thì phải có: $a = a^3 \Leftrightarrow a = 0$ hay $a = \pm 1$
 chọn $a = \pm 1$. Chọn câu D.

Câu 23: $y' = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$. Giao điểm của (c) với Oy là $A(0, 1); f'(0) = 1$.

Tiếp tuyến tại A là: $y = x + 1$. Chọn câu C.

Câu 24: $y = \frac{-x + 3}{2x - 1} \Leftrightarrow y = \frac{-1}{2} + \frac{5}{2(2x - 1)}$

$\Leftrightarrow 2y + 1 = \frac{5}{2x - 1}$. Để $x, y \in \mathbb{Z}$ thì cần phải có $2x - 1 = \pm 1, \pm 5$. Có 4

điểm tọa độ đều nguyên. Chọn câu C.

Câu 25: $y' = 3x(x - 2)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2$. Các điểm cực trị $A(0,4)$, $B(2,0)$
 $\Rightarrow AB = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}$. Chọn câu A

§4 Vấn đề 4: Bài tập trắc nghiệm tổng hợp về hàm số

Câu 1: Cho hàm số $y = \sin x$. Giá trị đạo hàm cấp 9 của hàm số tại $x = \frac{\pi}{2}$ là:

- A. 0 B. 1 C. -1 D. $\frac{1}{2}$.

Câu 2: Hàm số nào dưới đây là đạo hàm của hàm số: $y = (x + 1)e^x$

- A. $y' = (x + 1)e^x$ B. $y' = (x + 2)e^x$ C. $y' = (x - 1)e^x$ D. $y' = (x - 2)e^x$

Câu 3: Đạo hàm cấp n của hàm số $y = \cos x$ là:

- A. $\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ B. $\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ C. $\cos(x + n\pi)$ D. $\sin(x + n\pi)$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \lg\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Giá trị của $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ là:

- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. -4 D. 4.

Câu 5: Cho hàm số $f'(x) = a\sin x + b\cos x + 1$. Để có $f'(0) = \frac{1}{2}$ và

$f'\left(\frac{-\pi}{4}\right) = 0$ thì giá trị của a, b là:

- A. $a = b = 1$ B. $a = b = -1$ C. $a = b = \frac{1}{2}$ D. $a = b = -\frac{1}{2}$.

Câu 6: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x}$ là:

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. -2.

Câu 7: Cho $f(x) = x^2 + |x|$. Hãy chọn mệnh đề đúng dưới đây :

A. $f'(0^+) = -1$

B. $f'(0^-) = 1$

C. $f'(0) = 1$

D. Không tồn tại đạo hàm tại $x = 0$.

Câu 8: Cho hàm số: $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$. Để hàm số nhận điểm $A(1, -5)$ làm điểm cực tiểu thì giá trị của m là:

A. $m = -1$

B. $m = 1$

C. $m = 0$

D. $m = \frac{1}{2}$.

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{\ln x + 2}{\ln x - 1}$. Đường thẳng nào dưới đây là tiếp tuyến của đồ thị tại $x = 1$:

A. $y = 3x - 1$

B. $y = -3x + 1$

C. $y = -3x + 3$

D. $y = 3x + 1$.

Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - mx + m}{x + 1}$. Để hàm số có 2 điểm cực trị có hoành độ đều âm thì giá trị của m là:

A. $m < -\frac{1}{2}$

B. $m \geq 0$

C. $-\frac{1}{2} < m < 0$

D. $|m| = \frac{1}{2}$.

Câu 11: Cho hàm số $y = \frac{2x^2 - mx + m}{x - 2}$. Để hàm số có 2 điểm cực trị ở 2 phía trục Oy thì giá trị m là:

A. $m \geq 0$

B. $m < 0$

C. $m > 2$

D. $m < 2$.

Câu 12: Cho hàm số: $y = \sin x + \tan x - 2x$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng:

A. Hàm số giảm trên $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ B. Hàm số tăng trên $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ C. Hàm số có 1 cực trị trong $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ D. Hàm số tăng trên $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ và giảm trên $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 13. Miền giá trị của hàm số: $y = \frac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 1}$ là:

A. $[1, 6]$

B. $[2, 6]$

C. $[1, 2]$

D. $(2, 6)$.

Câu 14: Cho hàm số: $y = \frac{mx^3 + x + 1}{x^3 - 2x + 2}$. Hãy chọn mệnh đề đúng dưới đây:

- A. Hàm số không có điểm cực trị.
- B. Hàm số luôn luôn có 2 điểm cực trị.
- C. Hàm số chỉ có 1 điểm cực trị khi m thay đổi.
- D. Khi m thay đổi hàm số luôn luôn có ít nhất 1 cực trị.

Câu 15: Cho hàm số: $y = \frac{3x^2 - 5x + 5}{x - 1}$. Số điểm $M(x, y)$ trên đồ thị mà x, y đều nguyên là:

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4.

Câu 16: Để đồ thị hàm số $y = x^2 + a$ và đồ thị $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$ tiếp xúc nhau thì giá trị của a là:

- A. $a = -1$
- B. $a = 1$
- C. $a = 0$
- D. $a = \frac{1}{2}$.

Câu 17: Để đường thẳng $y = 2x + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{(m-1)x^2 + (m-3)x - 2}{x+2}$ tại 2 điểm ở hai nhánh khác nhau của đồ thị thì giá trị của m là:

- A. $0 < m < 4$
- B. $m > 4$
- C. $m < 0$
- D. $|m| > 4$.

Câu 18: Để hàm số: $y = \frac{x^2 + bx + c}{x + 1}$ nhận điểm $M(2, 0)$ làm điểm cực trị thì giá trị của b và c là:

- A. $b = -4, c = 2$
- B. $b = -4, c = 4$
- C. $b = 4, c = 2$
- D. $b = 4, c = -2$.

Câu 19: Cho $f(x) = x^2 + x$ và $g(x) = f(e^x)$. Đạo hàm của $g'(x)$ là biểu thức nào dưới đây:

- A. $g'(x) = 2e^{2x} + e^x$
- B. $g'(x) = (2e^{2x} + 1) \cdot e^{2x}$
- C. $g'(x) = e^{2x} + e^x$
- D. $g'(x) = 2e^x - e^{2x}$.

Câu 21: Cho hàm số $y = \frac{x}{1 + \ln x}$. Xét các mệnh đề:

I. Miền xác định của hàm số là $D = (0, \infty) \setminus \left(\frac{1}{e}\right)$.

II. Đồ thị nhận điểm $M(1,1)$ là điểm cực tiểu.

III. Hàm số tăng trên $\left(\frac{1}{e}, \infty\right)$.

Mệnh đề nào đúng :

A. Chỉ có I B. Chỉ có II C. Chỉ có III D. I và II.

Câu 22: Cho hàm số $y = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$. Điểm nào dưới đây là điểm cực trị của hàm số trên

A. (0,0) B. (1,5) C. (-1,1) D. (-1,5)

Câu 23: Trong các phương trình dưới đây, phương trình nào là phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = x_0$

A. $y - y_0 = f(x)(x - x_0)$ B. $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

C. $y - x_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ D. $y - y_0 = f'(x_0)(y - y_0)$.

Câu 24: Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 + (3m - 2)x - 2m$, khi m thay đổi thì đồ thị hàm số đi qua điểm cố định nào dưới đây:

A. Chỉ một điểm (1, -1) B. Chỉ một điểm (-2,4)

C. Hai điểm (1, -1) và (2,4) D. Hai điểm (1, -1) và (-1,1).

Câu 25: Cho hàm số: $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$

I. Đồ thị có tiệm cận xiên là $y = x + 1$ và tiệm cận đứng $x = 2$.

II. Hàm số tăng trên $(-\infty, -3) \cup (-1, \infty)$.

III. Điểm (-3, -3) và (-1,1) là các điểm cực trị.

Hãy chọn mệnh đề đúng:

A. Chỉ có I B. I và II C. II và III D. I, II và III.

Câu 26: Cho hàm số $y = -x - 1 + \frac{1}{x + 2}$, xét các mệnh đề:

I. Đồ thị hàm số nhận điểm (-3,1) và (-1,1) là điểm cực trị.

II. Hàm số luôn luôn giảm trên miền xác định.

III. Đồ thị có tiệm cận đứng là $x = -2$ và tiệm cận xiên là: $y = -x - 1$.

Mệnh đề nào đúng:

- A. I và II B. II và III C. Chỉ I đúng D. Chỉ III đúng.

Câu 27: Cho hàm số: $y = \frac{2x^3 - x + 1}{x - 1} \quad (c)$.

Xét các mệnh đề:

I. Đồ thị có điểm cực đại là $(0, -1)$ và điểm cực tiểu $(2, 7)$.

II. Điểm $I(1, 3)$ là tâm đối xứng của đồ thị.

III. Đồ thị hàm số không cắt trục Ox .

Mệnh đề đúng là:

- A. I và III B. II và III C. Chỉ có III D. I, II và III.

Câu 28: Đường thẳng $y = x - 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số:

$y = \frac{x^2 - 3mx + 3}{mx - 2}$ thì giá trị của m là:

- A. $m = -1$ B. $m = 1$ C. $m = \frac{1}{2}$ D. $m = -\frac{1}{2}$.

Câu 29: Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$. Phương trình tiếp tuyến và đồ thị tại gốc tọa độ là:

- A. $y = x$ B. $y = -x$ C. $y = 9x$ D. $y = -9x$.

Câu 30: Cho hàm số: $y = x - \frac{1}{x+1}$. Xét các mệnh đề:

I. Hàm số tăng trên miền xác định.

II. Điểm $I(-1, -1)$ là tâm đối xứng của đồ thị.

III. Hàm số đạt cực trị tại $x = 0$.

Mệnh đề nào là sai:

- A. I B. II C. III D. I và II.

Câu 31: Đạo hàm của hàm số $y = \cos^3(2x - \pi)$ là:

- A. $y' = 6\cos^2 2x \sin 2x$ B. $y' = -3\cos^2(2x - \pi)$
C. $y' = -6\sin^2 2x \cos 2x$ D. $y' = -3\cos^2(2x - \pi) \sin 2x$.

Câu 32: Giá trị của $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{\sin x}$ là

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1.

Câu 33: Cho $f(x) = \frac{|x|}{2x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng tại $x = x_0$:

- A. f liên tục và có đạo hàm B. f liên tục và không có đạo hàm
C. f không liên tục và có đạo hàm D. f có đạo hàm.

Câu 34: Giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \cos^2 x - \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos x}$ là:

- A. 0 B. 2 C. 4 D. -1.

Câu 35: Đồ thị hàm số $y = x^3 - x + 1$ tiếp xúc tại điểm $M(1,1)$ với đồ thị hàm số nào dưới đây:

- A. $y = x^2$ B. $y = 2x^2 - 1$
C. $y = -x^2 + 2$ D. $y = x^2 + x - 1$.

Câu 36: Cho hàm số $y = x^3 - 4x^2 + 4x$. Tiếp tuyến với đồ thị tại gốc tọa độ cắt đồ thị tại điểm nào dưới đây:

- A. (1,1) B. (4,16) C. (-1, -9) D. (-4, -12).

Câu 37: Miền xác định của hàm số: $y = \frac{1}{\sqrt{|x|} - x}$ là:

- A. $(0, \infty)$ B. $(-\infty, \infty)$ C. $(-\infty, 0)$ D. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

Câu 38: Cho miền xác định của hàm số $f(x)$ là $[0, 1]$. Miền xác định của hàm số $f(2x+1)$ là:

- A. $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ B. $[0, 1]$ C. $[1, 3]$ D. $\left[\frac{1}{2}, 0\right]$.

Câu 39: Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 \ln x$ trên $[1, e]$ là:

- A. $M = e^2, m = 0$ B. $M = e^2, m = e$
C. $M = \frac{1}{e^2}, m = 0$ D. $M = \frac{1}{e}, m = 0$.

Câu 40: Giá trị của $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{x}$ là:

- A. $\frac{3}{2}$ B. 1 C. -1 D. 0.

Câu 41: Đạo hàm cấp n của hàm số: $y = e^{3x}$ là:

A. $y^{(n)} = n.e^{3x}$ B. $y^{(n)} = \frac{1}{3} n.e^{3x}$ C. $y^{(n)} = 3^n .e^{3x}$ D. $y^{(n)} = e^{3nx}$.

Câu 42: Cho hàm số $y = e^x (x^2 - mx)$ đạt cực trị tại điểm $x = 1$. Giá trị cực tiểu của hàm số là:

A. e B. 0 C. $\frac{3}{4} e^2$ D. 2^e .

Câu 43: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x^2 - 4x + m}$. Để đồ thị hàm số chỉ có 1 tiệm cận thì giá trị của m là:

A. $m > 4$ B. $m = -12$ hay $m > 4$
C. $m = 4$ D. $m < 4, m \neq -12$.

Câu 44: Cho $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \leq 0 \\ -x^3 + bx + c & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Để tồn tại đạo hàm của hàm

số tại $x = 0$ thì giá trị của b và c là:

A. $b = c = 1$ B. $b = 1, c = 0$ C. $b = 0, c = 1$ D. $b = c = -1$.

Câu 45: Cho hàm số $y = \sin^3(2-x)$. Hàm số nào dưới đây là đạo hàm của hàm số trên

A. $f'(x) = 3\cos^2(2-x)$ B. $f'(x) = 3\cos^2(2-x).\sin(2-x)$
C. $f'(x) = -3\sin^2(2-x).\cos(2-x)$ D. $f'(x) = 3\sin^2(2-x)$.

Câu 46: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x - 5}{x - 2}$ (c). Số điểm trên (c) cách đều hai trục toạ độ là:

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4.

Câu 47: Cho hàm số: $y = \frac{-x^2 + 3x + m}{x - 4}$. Để hàm số có 2 điểm cực trị thoả

$y_{CT} - y_{CD} = 4$ thì giá trị của m là:

A. $m = \frac{1}{2}$ B. $m = 2$ C. $m = 1$ D. $m = 3$.

Câu 48: Cho hàm số: $y = \frac{2x^2 + (m-2)x}{x-1}$. Khi m thay đổi các điểm cực trị (nếu có) di chuyển trên đường nào dưới đây:

- A. $y = 4x$ B. $y = 4x - 2$ C. $y = 2x^2$ D. $y = -x^2$.

Câu 49: Cho hàm số: $y = \frac{x+1}{x-1}$ (c). Hãy chọn mệnh đề sai dưới đây.

- A. Trên đồ thị có vô số cặp điểm mà tiếp tuyến tại đó song song với nhau.
 B. Tiếp tuyến tại giao điểm của đồ thị với trục Oy có hệ số góc $k = -\frac{1}{2}$.
 C. Trên đồ thị (c) chỉ có 1 điểm duy nhất cách đều Ox và Oy.
 D. Có 4 điểm trên đồ thị (c) có toạ độ đều là số nguyên.

Câu 50: Cho hàm số: $y = \frac{x^2 - mx + 4}{x^2 - x}$. Để hàm số chỉ có 1 tiệm cận đứng thì giá trị của m là:

- A. $m = 5$ B. $m = 1$ C. $m = 0$ D. $m = -1$.

Câu 51: Cho $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{khi } x > 2 \\ x^2 - 3x & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$. Mệnh đề nào là đúng

- A. $f'(2) = 0$.
 B. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R.
 C. Hàm số không có đạo hàm tại $x_0 = 2$.
 D. Khi $x \leq 2$ thì $f'(x) = 2x - 3$ nên $f'(2) = 1$.

Câu 52: Cho hàm số $y = \cos^3(1-2x)$. Đạo hàm của y là hàm số nào sau đây :

- A. $y' = 6\cos^2(1-2x)\sin(1-2x)$ B. $y' = -3\cos^2(1-2x)$
 C. $y' = 6\sin^2(1-2x)$ D. $y' = 3\sin^2(1-2x).\cos(1-2x)$.

Câu 53: Cho hàm số $y = \sin 2x$. Hãy chọn mệnh đề đúng

- A. $y^{(4)} = 16y$ B. $y^{(4)} + 4y = 0$ C. $y^2 + y'^2 = 1$ D. $y''' = 4y'$.

Câu 54: Cho hàm số $y = x^4 + x^3 - x^2$. Hãy chọn mệnh đề đúng :

- A. Hàm số không có đạo hàm bậc lớn hơn 4.
 B. $\forall n \in \mathbb{N}, n > 4$ thì $y^{(n)} = 0$.

C. $f''(2) = 1$.

D. $f' + x^4 = 4y$.

Câu 55: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x}$. Hãy chọn mệnh đề đúng :

A. Vì $f(4) = 2$ nên $f'(4) = 0$

B. Vì $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ nên $f'(0) = \infty$

C. Vì $f(x)$ có miền xác định là $[0, \infty]$ nên không tồn tại $f'(0)$

D. Vì $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x}}{x} = \infty$ nên $f'(0) = \infty$.

Câu 56: Cho hàm số $y = mx^3 + x^2 + x - 5$. Để $y' > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ thì giá trị của m là

A. $n > 0$ B. $m > \frac{1}{3}$ C. $m < 0$ D. $m \leq 0$.

Câu 57: Cho hàm số $y = \cos^2 x$. Đạo hàm $y^{(2n)}$ là hàm số nào dưới đây :

A. $2^n \cos 2x$ B. $(-1)^n 2^n \cos 2x$

C. $(-1)^n 2^{2n-1} \cos 2x$ D. $(-1)^n 2^n \sin 2x$.

Câu 58: Cho hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 1$. Tiếp tuyến với đồ thị song song với OX có phương trình là :

A. $y = 1$ B. $y = -1$ C. $y = 2$ D. $y = -2$

Câu 59: Cho $f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{n+1}}{n+1} (n \in \mathbb{N})$. Giá trị của $f'(\frac{1}{2})$ là :

A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. ∞ D. 0.

Câu 60: Để hàm số $y = -x^3 + mx$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì giá trị của m là

A. $n = 0$ B. $1 < m < 3$ C. $m \leq 0$ D. $m > 0$.

Câu 61: Cho hàm số $y = x^3$. Mệnh đề nào dưới đây là sai :

A. Hàm số luôn luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Trục Ox là tiếp tuyến với đồ thị tại gốc O.

C. Cốc O là điểm cực trị của đồ thị hàm số.

D. Phương trình $x^3 = m$ luôn luôn có 1 nghiệm duy nhất.

Câu 62: Cho hàm số $y = |x|$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng :

- A. Gốc O là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.
- B. $f'(0) = 0$.
- C. Hàm số luôn luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- D. $f'(x) = 1 \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 63: Cho hàm số $y = x - \sin 2x$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng :

- A. Hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{-\pi}{6} + k\pi$.
- B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{-\pi}{6} + k\pi$.
- C. Hàm số không có điểm cực trị.
- D. Hàm số luôn luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 64: Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x - 1}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng :

- A. Đồ thị có 2 đường tiệm cận.
- B. Đồ thị có 3 đường tiệm cận.
- C. Đồ thị hàm số đối xứng qua điểm $I(1,1)$.
- D. Đồ thị hàm số chỉ có 1 tiệm cận.

Câu 65: Cho hàm số $y = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x \leq 1 \\ -4x^2 + 10x - 4 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ Mệnh đề nào dưới đây là sai :

- A. Điểm $I(1,2)$ là điểm uốn của đồ thị.
- B. Tiếp tuyến tại điểm $I(1,2)$ là đường thẳng $y = 2x$.
- C. Hàm số tăng trên $(-\infty, 0)$ và giảm trên $(1, \infty)$.
- D. Hàm số không có đạo hàm tại $x = 1$.

Câu 66: Vi phân của hàm số $f(x) = \sin x$ tại $x = \frac{\pi}{4}$ ứng với $\Delta x = 0,01$ có giá trị chính xác đến hàng phần nghìn là :

- A. 0,007
- B. 0,006
- C. 0,009
- D. 0,005.

Câu 67: Cho $f(x) = \ln(1 + x)$. Giá trị của $f^{(5)}(1)$ là :

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{4}{5}$

D. $\frac{1}{3}$.

Câu 68: Cho $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Giá trị của $f'(0)$ là :

A. $-\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{1}{8}$

D. $\frac{1}{8}$.

Câu 69: Cho y là hàm số theo ẩn số x và thoả phương trình: $xy = \ln y + 1$.

Đạo hàm y' (theo ẩn số x) là :

A. $y' = \frac{y^2}{1-xy}$

B. $y' = \frac{y^2}{1+xy}$

C. $y' = \frac{1}{1+xy}$

D. $y' = \frac{y}{xy-1}$.

Câu 70: Cho hàm số $y = (x+1)e^x$. Đạo hàm cấp n của hàm số là :

A. $y^{(n)} = (x+n)e^x$

B. $y^{(n)} = (x+n-1)e^x$

C. $y^{(n)} = (x+n+1)e^x$

D. $y^{(n)} = n.e^x$.

Câu 71: Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$:

A. $y = \frac{x+1}{x-1}$

B. $y = -\lg x$

C. $y = -x^3 - x^2$

D. $y = \frac{1}{5^x}$.

Câu 72: Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích bằng 48m^2 thì hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất bằng :

A. 453

B. 16

C. 12

D. $16\sqrt{3}$.

Câu 73: Cho hàm số $y = x^3(1-x)^2$. Hãy chọn mệnh đề đúng :

A. Hàm số có 3 điểm cực trị

B. Hàm số có 2 điểm cực trị

C. Điểm $(0,0)$ là điểm cực tiểu

D. Điểm $(1,0)$ là điểm cực đại.

Câu 74: Cho hàm số $y = x^2 \ln x$. Hãy chọn mệnh đề đúng :

A. Hàm số xác định trên $[0, \infty)$.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm có hoành độ $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

C. Hàm số đạt cực đại tại điểm có hoành độ $x = \sqrt{e}$.

D. Hàm số có 2 điểm cực trị lần lượt có hoành độ $x = \pm \sqrt{e}$.

Câu 75: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$. Trong các đường thẳng dưới đây, đường nào là tiếp tuyến với đồ thị xuất phát từ gốc O.

- A. $y = 3x$ B. $y = \frac{15}{4}x$ C. $y = 0$ D. $y = \frac{3}{4}x$.

Câu 76: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị tại điểm cực đại của hàm số là :

- A. $y = 0$ B. $y = 1$ C. $y = x$ D. $y = -1$.

Câu 77: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x^2-4x+m}$. Để hàm số có đúng 3 tiệm cận thì

giá trị của m là:

- A. $m < 4$ B. $m = 4$
C. $m > 4$ D. $m < 4$ và $m \neq -8$.

Câu 78: Cho hàm số $y = 2e^x(x-3)$. Hãy chọn mệnh đề đúng sau đây :

- A. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm có $x = 2$.
B. Hàm số đạt cực đại tại điểm có $x = 2$.
C. Tiếp tuyến tại gốc O có hệ số góc bằng -6 .
D. Đồ thị cắt Ox tại 2 điểm phân biệt.

Câu 79: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^2 + 1$. Xét các mệnh đề sau :

- I. Đồ thị luôn luôn có 1 điểm cực đại trên trục Oy.
II. Đồ thị hàm số luôn luôn ở trên trục Ox.
III. Khi $m > 0$ đồ thị có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.

Mệnh đề nào đúng :

- A. Chỉ có I đúng B. I và II đúng
C. II và III đúng D. Chỉ có III đúng

Câu 80: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x-2}$. Cho biết đồ thị cắt Oy tại điểm có tung độ $= 2$

và tiếp tuyến tại giao điểm này có hệ số góc bằng $-\frac{1}{2}$. Giá trị của a và b là :

- A. $a = 3; b = 4$ B. $a = 4; b = 3$
C. $a = 3; b = -4$ D. $a = -4; b = -3$.

Đáp án

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Chọn	A	B	A	C	C	A	D	B	B	C
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Chọn	B	B	A	D	D	A	A	B	A	A
Câu	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Chọn	D	C	B	C	D	B	D	B	C	C
Câu	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Chọn	A	A	B	D	A	B	C	A	A	B
Câu	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Chọn	C	B	B	A	C	C	D	C	A	
Câu	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Chọn	C	A	A	B	C	B	C	B	B	C
Câu	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
Chọn	C	A	A	B	C	A	B	D	A	C
Câu	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
Chọn	D	D	B	B	B	B	D	A	C	C

Chương II: NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN.

§1 Vấn đề 1: NGUYÊN HÀM

A. Tóm tắt lý thuyết:

* Định nghĩa: $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên (a,b) nếu $\forall x \in (a,b)$, ta có: $F'(x) = f(x)$.

+ Nếu thay (a,b) bằng $[a,b]$ thì phải có thêm $F'(a^+) = f(a)$ và $F'(b^-) = f(b)$.

* Tính chất cơ bản:

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên (a,b) thì:

- $F(x) + C$ cũng là nguyên hàm của $f(x)$
- Mọi nguyên hàm của $f(x)$ đều có thể viết dưới dạng $F(x) + C$
- Mọi hàm số liên tục trên $[a, b]$ đều có nguyên hàm trên $[a, b]$
- Ký hiệu: $\int f(x) = F(x) + C$
- $\left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$
- $\int af(x) dx = a \int f(x) dx \quad (a \neq 0)$
- $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
- $\int f(t) dt = F(t) + C \Rightarrow \int f(u(x))u'(x) dx = F(u(x)) + C$

* Bảng công thức nguyên hàm:

Nguyên hàm các hàm số sơ cấp	Nguyên hàm các hàm số hợp
$\int dx = x + C$	$\int du = u + C$
$\int x^a = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1)$	$\int u^a du = \frac{u^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1)$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	$\int \frac{du}{u} = \ln u + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^u du = e^u + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos u du = \sin u + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin u du = -\cos u + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \tan u + C$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\cot u + C$

I. Các áp dụng cơ bản:

* Chứng minh $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên D

PP. Ta chứng minh $F'(x) = f(x) \forall x \in D$.

* Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)$

PP. Phân tích $f(x)$ thành tổng (hiệu) của các hàm số sơ cấp cơ bản (có công thức tính nguyên hàm) tính nguyên hàm từng phần rồi suy ra kết quả.

Hoặc: + Dùng tính chất: $\int f(t) dt = F(t) + C \Rightarrow \int f(u) du = F(u) + C$.

* Tìm một nguyên hàm thoả điều kiện cho trước (xác định C)

PP. Tìm $F(x) + C$, dựa vào giả thiết để suy ra giá trị C .

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Chứng minh: $F(x) = |x| - \ln(1 + |x|)$ là một nguyên hàm của

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Khi } x > 0: F'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} = f(x)$$

$$\text{Khi } x < 0: F'(x) = -1 + \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1-x} = f(x)$$

$$\text{Tại } x = 0: \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x - \ln(1 + \Delta x)}{\Delta x} = 1 - \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{(1 + \Delta x)}{\Delta x} = 1 - 1 = 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x - \ln(1 - \Delta x)}{-\Delta x} = -1 + 1 = 0.$$

Do đó: $F'(0^+) = F'(0^-) = 0$.

$$\text{Vậy: } F'(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & \text{khi } x > 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \\ \frac{x}{1-x} & \text{khi } x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow F'(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

Do đó: $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

Bài 2: Cho $f(x) = x\sqrt{3-x}$. Tìm a, b, c để $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{3-x}$ là 1 nguyên hàm của $f(x)$.

Hướng dẫn giải:

Ta có $D_f = D_{f'} = (-\infty, 3]$.

$$F'(x) = (2ax + b)\sqrt{3-x} - \frac{2(ax^2 + bx + c)}{2\sqrt{3-x}} = \frac{-5ax^2 + (12a - 3b)x + 6b - c}{2\sqrt{3-x}}$$

$F(x)$ là nguyên hàm của $f(x) \Rightarrow F'(x) = f(x) \quad \forall x < 3$

$$\Leftrightarrow -5ax^2 + (12a - 3b)x + 6b - c = 6x - 2x^2.$$

$$\text{Đồng nhất ta được } a = \frac{2}{5}, b = \frac{-2}{5}, c = \frac{-12}{5}.$$

Bài 3:

a) Cho $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x$. Tìm nguyên hàm $F(x)$ biết rằng $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

b) Cho $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5x+3} - \sqrt{5x+1}}$. Tìm nguyên hàm $F(x)$ biết $F(0) = 0$.

Hướng dẫn giải:

a) $f(x) = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$.

$$\text{Do đó: } F(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

$$F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Vậy } F(x) = \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$b. f(x) = \frac{\sqrt{5x+3} + \sqrt{5x+1}}{2} = \frac{1}{2} \left[(5x+3)^{\frac{1}{2}} + (5x+1)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$\text{Do đó: } F(x) = \frac{1}{15} (5x+3)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{15} (5x+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$F(0) = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{1+3\sqrt{3}}{15}$$

$$\text{Vậy: } F(x) = \frac{1}{15} (5x+3)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{15} (5x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1+3\sqrt{3}}{15}$$

Bài 4: Tìm A, B, C để cho:

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \int \left(\frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} \right) dx$$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Để ý rằng: } \int \frac{A}{(x+2)^2} dx = -\frac{A}{x+2} + C$$

Do đó ta phải tìm A, B, C để cho

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{-A}{(x+2)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$$

Đồng nhất ta được $A = B = 1, C = -1$.

Bài 5: Tìm họ nguyên hàm của:

$$a) f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$$

$$b) g(x) = \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}$$

$$c) h(x) = \frac{1}{\tan^5 x}$$

Hướng dẫn giải:

$$a) \int f(x) dx = \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = \ln |\sin x + \cos x| + C.$$

$$b) \int g(x) dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x} dx = \int (\cos x - \sin x) dx = \sin x + \cos x + C.$$

$$c) \int h(x) dx = \int \frac{\cos^5 x}{\sin^5 x} dx = \int \frac{(1 - \sin^2 x)^2}{\sin^5 x} d(\sin x)$$

$$= \int \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{2}{\sin^3 x} + \frac{1}{\sin^5 x} \right) d(\sin x)$$

$$= \ln|\sin x| + \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{4\sin^4 x} + C.$$

Bài 6: Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \cot^2 \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$ b. $g(x) = \frac{\cot x}{1 + \sin^9 x}$ c. $h(x) = \frac{1}{\cos x \cdot \sin^4 x}$.

Hướng dẫn giải:

a) $\int \cot^2(2x + \pi/4) dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x + \pi/4)}{\sin^2(2x + \pi/4)} - \int dx$

$$= -\frac{1}{2} \cot(2x + \frac{\pi}{4}) - x + C.$$

b) $\int \frac{\cot x}{1 + \sin^9 x} dx = \int \frac{\cos x}{\sin x(1 + \sin^9 x)} dx = \int \frac{\cos x \cdot \sin 8x}{\sin^9 x(1 + \sin^9 x)} dx$

$$= \frac{1}{9} \int \frac{d(\sin^9 x)}{\sin^9 x(1 + \sin^9 x)} = \frac{1}{9} \left[\int \left(\frac{1}{\sin^9 x} - \frac{1}{1 + \sin^9 x} \right) d(\sin^9 x) \right]$$

$$= \frac{1}{9} \ln \left| \frac{\sin^9 x}{1 + \sin^9 x} \right| + C.$$

c. $\int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^4 x} = \int \frac{1(\sin x)}{\cos^2 x \cdot \sin^4 x} = \int \frac{d(\sin x)}{(1 - \sin^2 x)(\sin^4 x)}$

$$(u = \sin x) \Rightarrow \int \frac{du}{u^4(1 - u^2)} = \int \left(\frac{1}{u^2} + \frac{4}{u^4} + \frac{1}{2(1+u)} - \frac{1}{2(1-u)} \right)$$

$$= -\frac{1}{u} - \frac{1}{3u^3} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + C$$

$$= -\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + C.$$

Bài 7:

a. Tính: $I = \int \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$

b. Tính $J = \int \cos^2 2x \cdot \cos 3x dx$.

Hướng dẫn giải:

a) Xét $I' = \int \frac{\sin x dx}{\cos x + \sin x}$ ta có:

$$I + I' = \int dx = x + C$$

$$I - I' = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx = \ln |\cos x + \sin x| + C'$$

Do đó: $I = \frac{1}{2} (x + \ln |\cos x + \sin x|) + C$.

b) Xét $J' = \int \sin^2 2x \cdot \cos 3x dx \Rightarrow J + J' = \int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \sin 3x + C$.

$$J - J' = \int \cos 4x \cdot \cos 3x dx = \frac{1}{2} \int (\cos x + \cos 7x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sin x + \frac{1}{7} \sin 7x \right) + C''$$

Giải hệ ta có: $J = -\frac{1}{4} \sin x + \frac{1}{6} \sin 3x - \frac{1}{28} \sin 7x + C$.

Bài 8: a. Tính $I = \int \frac{dx}{\sqrt{2} + \sin x - \cos x}$.

b. Tính $J = \int \frac{dx}{\cos x \cdot \cos(x + \pi/4)}$.

Hướng dẫn giải:

a. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{2} + \sin x - \cos x} = \int \frac{dx}{\sqrt{2}(1 - \cos(x + \pi/4))}$

$$= \int \frac{dx}{2\sqrt{2} \sin^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right)}{\sin^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right)}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \cot \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) + C.$$

$$\begin{aligned}
 \text{b. } J &= \int \frac{dx}{\cos x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} \int \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \left(\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tg} x \right) dx = \sqrt{2} \left[\int \frac{-d\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} + \int \frac{d\cos x}{\cos x} \right] \\
 &= \sqrt{2} \left[\ln|\cos x| - \ln\left|\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| \right] + C = \sqrt{2} \ln \left| \frac{\cos x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} \right| + C.
 \end{aligned}$$

Bài 9:

$$\text{a. Tính } I = \int \frac{1-x^5}{x(1+x^5)} dx$$

$$\text{b. Tính } J = \int \frac{dx}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1}}.$$

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned}
 \text{a. } I &= \frac{1}{5} \int \frac{(1-x^5)d(x^5)}{x^5(1+x^5)} = \frac{1}{5} \int \left(\frac{1}{x^5} - \frac{2}{1+x^5} \right) d(x^5) \\
 &= \frac{1}{5} \left[\ln|x^5| - 2\ln|1+x^5| \right] + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b. } J &= \int \frac{dx}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1}} = \frac{1}{2} \int \sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1} dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[\int (2x+1)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} d(2x+1) - \int (2x-1)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} d(2x-1) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[(2x+1)\sqrt{2x+1} - (2x-1)\sqrt{2x-1} \right] + C.
 \end{aligned}$$

Bài 10:

$$\text{Tính } I = \int \frac{\sin(x+\alpha)}{\cos^2 x} dx \quad (\alpha \text{ là hằng số})$$

Hướng dẫn giải:

$$I = \int \frac{\sin x \cos \alpha + \cos x \sin \alpha}{\cos^2 x} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \cos \alpha \int \frac{-d(\cos x)}{\cos^2 x} + \sin \alpha \int \frac{d(\sin x)}{1 - \sin^2 x} \\
&= \frac{\cos \alpha}{\cos x} + \frac{1}{2} \sin \alpha \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + C.
\end{aligned}$$

III. Bài tập tự luyện:

Bài 1: Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = x(1 - 2x^2)^{2001}$

d) $f(x) = \frac{2x}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$

e) $f(x) = \frac{1}{1 + 8^x}$

c) $f(x) = x\sqrt{x+1}$

Bài 2: Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = \cos^3 x \cos 3x$

b) $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin 2x}$

c) $f(x) = (\sin^6 x + \cos^6 x) \cos 4x$

Bài 3: Chứng minh $F(x) = \frac{1}{2} \left[x\sqrt{x^2 + a} + a \ln|x| + \sqrt{x^2 + a} \right]$ là 1 nguyên

hàm của $f(x) = \sqrt{x^2 + a}$.

Suy ra nguyên hàm của $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Bài 4: Cho $y = \frac{3x^2 + 3x + 5}{x^3 - 3x + 2}$

a. Tìm A, B, C để $y = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$.

b. Tìm họ nguyên hàm của y.

Bài 5: Chứng minh: $F(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} \ln x - \frac{x}{4} & \text{khi } x > 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

là nguyên hàm của $f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{khi } x > 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

Bài 6: Tìm họ nguyên hàm của: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 5x + 1)(x^2 - 3x + 1)}$.

Bài 7: Tìm họ nguyên hàm của: $f(x) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cot\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Bài 8: Tìm họ nguyên hàm của:

a) $f(x) = \frac{x^4 - 2}{x^3 - x}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^3 - x}$

c) $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}}$

d) $f(x) = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$

Bài 9: Tìm họ nguyên hàm của: $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) (2 + \sin 2x)$.

IV. Hướng Dẫn – Đáp số

Bài 1:

a) $\int f(x) dx = -\frac{1}{8.008} (1 - 2x^2)^{2002} + C$.

b) $\int f(x) dx = \frac{1}{3} (x+1) \sqrt{x+1} - \frac{1}{3} (x-1) \sqrt{x-1} + C$.

c) $\int f(x) dx = \frac{2}{5} (x+1)^2 \sqrt{x+1} - \frac{2}{3} (x+1) \sqrt{x+1} + C$.

d) $\int f(x) dx = \frac{2}{3} x^3 - \frac{2}{3} (x^2 - 1) \sqrt{x^2 - 1} + C$.

e) Đặt $t = 1 + 8^x = \int f(x) d_x = \frac{1}{3 \ln 2} \ln \frac{8^x}{1 + 8^x} + C$.

Bài 2:

a) $F(x) = \frac{1}{48} \sin 6x + \frac{3}{32} \sin 4x + \frac{3}{16} \sin 2x + C$.

b) $f(x) = \frac{1}{2} \frac{\sin x + \cos x + \sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2} \sin(x + \pi/4)} - \frac{\sin x - \cos x}{(\sin x - \cos x)^2}$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right| + \frac{1}{2(\sin x + \cos x)} + C.$$

$$c) \quad F(x) = \frac{5}{32} \sin 4x + \frac{3}{128} \sin 8x + \frac{3}{16} \sin x + C.$$

Bài 3: Tính $F'(x)$, rút gọn: $\int \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \left[x\sqrt{x^2 + 1} + \ln|x + \sqrt{x^2 + 1}| \right] + C.$

Bài 4: Đồng nhất đẳng thức ta được $A = 3, B = 2, C = 1.$

$$F(x) = -\frac{3}{x-1} + \ln(x-1)^2 + \ln|x+2| + C.$$

Bài 6: Phân tích $\frac{x^2 - 1}{(x^2 + 5x + 1)(x^2 - 3x + 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 5x + 1} + \frac{(Cx + D)}{x^2 - 3x + 1}.$

Đồng nhất ta có: $A = \frac{-1}{4}; B = \frac{-5}{8}; C = \frac{1}{4}; D = -\frac{3}{8}.$

$$I = \frac{-1}{8} \ln \left| \frac{x^2 + 5x + 1}{x^2 - 3x + 1} \right| + C.$$

Bài 7:

$$\text{Biến đổi: } f(x) = \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin \frac{\pi}{6}}{\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin \frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{\cos 2x + \frac{1}{2}}{\cos x - \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\cos 2x - \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2 - \frac{3}{2}(1 + \operatorname{tg}^2 x)}$$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = x + \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\sqrt{3} \operatorname{tg} x)}{1 - (\sqrt{3} \operatorname{tg} x)^2} + x + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{(1 + \sqrt{2} \operatorname{tg} x)x} - \sqrt{1 - \sqrt{3} + 3x} \right)$$

$$= x + \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} x}{1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} x} \right| + C.$$

Bài 8:

- a) $\int \frac{x^4 - 2}{x^3 - x} dx = \int \frac{x^2 + 1}{x} dx - \int \frac{dx}{x(x^2 - 1)} = \frac{x^2}{2} + 2 \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x^2 - 1| + C.$
- b) $\int \frac{dx}{x^3 - x} = \int \frac{x dx}{x^2 - 1} - \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \ln|x^2 - 1| - \ln|x| + C.$
- c) $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{x+1}} = \int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x+1}} dx - \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}} = \frac{3}{5} (x+1)^{\frac{5}{3}} \sqrt[3]{(x+1)^2} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x+1)^2} + C.$

B. Trắc nghiệm về nguyên hàm

Câu 1: Một nguyên hàm của hàm số: $f(x) = \frac{x}{x+1}$ là:

- A. $\ln|x+1|$ B. $x + \ln|x+1|$ C. $x - \ln|x+1|$ D. $2 \ln|x+1|$.

Câu 2: Hàm số nào dưới đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$:

- A. $x + \frac{1}{4} \sin 4x$ B. $\frac{1}{4} x + \sin 4x$
 C. $\frac{3}{4} x + \frac{1}{16} \sin 4x$ D. $\frac{3}{4} x - \frac{1}{4} \cos 4x.$

Câu 3: Một nguyên hàm của $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x$ là:

- A. $\cos 2x$ B. $\frac{1}{2} \sin 2x$ C. $2 \sin 2x$ D. $\cos^2 x.$

Câu 4: Một nguyên hàm của $f(x) = \tan^2 x$ là:

- A. $\frac{1}{3} \tan^3 x$ B. $\frac{1}{3} \tan^3 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$ C. $\tan x - x$ D. $\frac{2 \sin x}{\cos^3 x}.$

Câu 5: Một nguyên hàm của $f(x) = (x^2 + 2x)e^x$ là:

- A. $(2x+2)e^x$ B. $x^2 e^x$ C. $(x^2 + x)e^x$ D. $(x^2 - 2x)e^x.$

Câu 6: Một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x \ln|x|}$ là:

- A. $\ln|x|$ B. $\ln|\ln|x||$ C. $\frac{1}{\ln|x|}$ D. $\frac{1}{\ln|\ln x|}.$

Câu 7: Cho $f(x) = 1 + \left(\frac{2t}{1-t^2} \right)^2$ với $t = \tan \frac{x}{2}$. Hàm số nào dưới đây là một nguyên hàm của $f(x)$

- A. $\cot x$ B. $\frac{1}{\sin^2 x}$ C. $\frac{1}{\cos^2 x}$ D. $\tan x$.

Câu 8: Một nguyên hàm của $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ là:

- A. $\frac{-1}{x^2}$ B. $x + \ln|x|$ C. $x - \frac{1}{x^2}$ D. $\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^2$.

Câu 9: Một nguyên hàm của $f(x) = x^3 e^x$ là:

- A. $(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x$ B. $(x^3 - 6x + 6)e^x$.
C. $(x^3 + 3x^2 - 6)e^x$ D. $3x^2 e^x$.

Câu 10: Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ là:

- A. $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ B. $\ln(x - \sqrt{x^2 + 1})$
C. $\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$ D. $x\sqrt{x^2 + 1}$.

Câu 11: Cho $f(x) = \sin x - \cos x$. Một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thoả $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ là:

- A. $-\cos x - \sin x + \sqrt{2}$ B. $-\cos x - \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}$
C. $\cos x - \sin x + \sqrt{2}$ D. $\cos x - \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 12: Cho $f(x) = 1 + |x|$. Một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thoả $F(1) = 1$ là:

- A. $x^2 + x + 1$ B. $\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2}$ C. $\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}$ D. $-x^2 + x + \frac{1}{2}$.

Câu 13: Cho $f(x) = 2x + \sin x + 2 \cos x$. Một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thoả $F(0) = 1$ là :

- A. $x^2 - \cos x + 2 \sin x + 2$ B. $x^2 + \cos x + 2 \sin x + 2$
 C. $2 + \cos x + 2 \sin x$ D. $x^2 + \cos x + 2 \sin x - 2$.

Câu 14: Cho $f(x) = 8 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{12} \right)$. Một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thoả $F(0) = 8$ là:

- A. $4x + 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + 9$ B. $4x - 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + 9$
 C. $4x + 2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + 7$ D. $4x - 2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + 7$.

Câu 15: Cho $f(x) = xe^{-x}$. Một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thoả $F(0) = 1$ là:

- A. $-(x+1)e^{-x} + 1$ B. $-(x+1)e^{-x} + 2$
 C. $(x+1)e^{-x} + 1$ D. $(x+1)e^{-x} + 2$.

Câu 16: Cho $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x + 1}$. Một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thoả $F(1) = 0$ là:

- A. $x + \frac{2}{x+1} - 2$ B. $x + \frac{2}{x+1} + 2$
 C. $x - 2 \ln(x+1)^2$ D. $x - \frac{2}{x+1} + 2$.

Câu 17: Để $F(x) = a \cos x + b \sin x)e^x$ là một nguyên hàm của $f(x) = e^x \cos x$ thì giá trị của a, b là:

- A. $a = 1, b = 0$ B. $a = 0, b = 1$ C. $a = b = 1$ D. $a = b = \frac{1}{2}$.

Câu 18: Cho f và g là hàm số liên tục có F và G lần lượt là nguyên hàm của f và g . Xét các mệnh đề:

- I. $F + G$ là một nguyên hàm của $f + g$.
 II. kF là một nguyên hàm của kf ($k \in \mathbb{R}$).
 III. $F.G$ là một nguyên hàm của $f.g$.

Mệnh đề nào là đúng?

- A. Chỉ I B. Chỉ II C. I và II D. I, II, III.

Câu 19: Cho $f(x) = x \sin x$. Nguyên hàm của $f(x)$ là:

A. $-x \cos x + c$

B. $x \sin x + \cos x + c$

C. $\sin x + x \cos x + c$

D. $-x \cos x + \sin x + c$.

Câu 20: Cho $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$. Hàm số nào dưới đây là một nguyên hàm của $f(x)$:

A. $\operatorname{tg} x + \cot g x$

B. $\operatorname{tg} x - \cot g x$

C. $\frac{1}{\sin 2x}$

D. $\frac{1}{\cos 2x}$.

C. Hướng dẫn giải trắc nghiệm về nguyên hàm

Câu 1: $f(x) = 1 - \frac{1}{x+1} \Rightarrow F(x) = x - \ln|x+1| + C$. Chọn câu C.

Câu 2: $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x \Rightarrow F(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{16} \sin 4x$.

Chọn câu C.

Câu 3:

$$f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos 2x$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + C.$$

Chọn câu B.

Câu 4: $f(x) = \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \Rightarrow F(x) = \operatorname{tg} x - x + C$. Chọn câu C.

Câu 5: Đề ý $(u(x) \cdot e^x)' = [u(x) + u'(x)]e^x$

$$F(x) = x^2 e^x \Rightarrow f(x) = (x^2 + 2x)e^x. \text{ Chọn câu B.}$$

Câu 6: Đề ý: $(\ln|\ln|x||)' = \frac{(\ln|x|)'}{\ln|x|} = \frac{1}{x \ln|x|}$. Chọn câu B.

Câu 7: $f(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow F(x) = \operatorname{tg} x + C$. Chọn câu D.

Câu 8: $f(x) = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow F(x) = x + \ln|x| + C$. Chọn câu B.

Câu 9: Kiểm tra $F'(x) = f(x)$. Chọn câu C.

Câu 10: $\ln(x + \sqrt{x+1})' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x+1}}}{x + \sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

$\Rightarrow F(x) = \ln(x + \sqrt{x+1}) + C$. Chọn câu A.

Câu 11: $F(x) = -\cos x - \sin x + C$

$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + C = 0 \Leftrightarrow C = \sqrt{2}$. Chọn câu A.

Câu 12: $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{khi } x \geq 0 \\ 1-x & \text{khi } x < 0 \end{cases} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} x + \frac{x^2}{2} + C_1 & \text{khi } x \geq 0 \\ x - \frac{x^2}{2} + C_2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

$F(1) = 1 \Leftrightarrow C_1 = -\frac{1}{2}$

$F(x) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2}$. Chọn câu B.

Câu 13: $F(x) = x^2 - \cos x + 2 \sin x + C$

$F(0) = 1 \Leftrightarrow -1 + C = 1 \Leftrightarrow C = 2$. Chọn câu A.

Câu 14: $f(x) = 8 \sin^2\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = 8 \left(\frac{1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)}{2} \right)$

$f(x) = 4 - 4 \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow F(x) = 4x - 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + C$

$f(0) = 8 \Leftrightarrow -2 \sin \frac{\pi}{6} + C = 8 \Leftrightarrow C = 9$. Chọn câu B.

Câu 15: $F(x) = -(x+1)e^{-x} + C$

$F(0) = -1 + C = 1 \Leftrightarrow C = 2$. Chọn câu B.

Câu 16: $f(x) = 1 - \frac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow F(x) = x + \frac{2}{x+1} + C$

$F(1) = 0 \Leftrightarrow C = -2$. Chọn câu A.

Câu 17: $F'(x) = [(a+b)\cos x + (b-a)\sin x]e^x$

$$F''(x) = e^x \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ a-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}. \text{ Chọn câu D.}$$

Câu 18: Mệnh đề III sai. Chọn câu C.

Câu 19: Dùng nguyên hàm từng phần: Đặt $u = x$, $dv = \sin x dx$

Thì $F(x) = -x \cos x + \sin x + C$. Chọn câu D.

Câu 20: $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}$

$F(x) = \tan x - \cot x + C$. Chọn câu B.

§2 Vấn đề 2: TÍCH PHÂN CƠ BẢN

I. Tóm Tắt Lý Thuyết

* Định nghĩa: $\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

a. Các tính chất của tích phân

a) $\int_a^a f(x)dx = 0$

b) $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

c) $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$

d) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

e) $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

f) $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a, b]$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

g) $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$ thì

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

h) $G(t) = \int_a^t f(x)dx$ là nguyên hàm của $f(t)$ và $G(a) = 0$.

II. Áp Dụng Cơ Bản: Phân tích $f(x)$ thành tổng, hiệu các hàm số cơ bản, tìm $F(x)$ rồi áp dụng định nghĩa.

Bài 1: Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_0^1 (1-x-x^2)^2 dx$

b) $\int_1^2 \frac{x^3 + x^2 - 2x + 1}{x^3} dx$

c) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}$

d) $\int_0^1 e^{2x} \sqrt{e^x - 1} dx$

Hướng dẫn giải:

a) $I = \int_0^1 (x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1) dx = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} - x^2 + x \Big|_0^1 = \frac{11}{30}.$

b) $I = \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) dx = x + \ln x + x + \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2} \Big|_1^2 = \frac{11}{8} + \ln 2.$

c) $I = \int_1^2 \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} dx = \frac{1}{3} [(x+1)\sqrt{x+1} - (x-1)] \Big|_1^2 = \frac{1}{3} (3\sqrt{3} - 2\sqrt{2} - 1).$

d) $I = \int_0^1 e^x \sqrt{e^x - 1} d(e^x) = \int_0^1 (e^x - 1 + 1) \sqrt{e^x - 1} d(e^x)$
 $= \int_0^1 \left[(e^x - 1)^{\frac{3}{2}} + (e^x - 1)^{\frac{1}{2}} \right] d(e^x - 1) = \frac{2}{5} (e^x - 1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} (e^x - 1)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1$
 $= \frac{2}{5} (e - 1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} (e - 1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{15} \sqrt{e - 1} (3e^2 - 6e + 8).$

Bài 2: Tính các tích phân sau:

a) $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin 2x} dx$

b) $J = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos x} dx$

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned} \text{a) } I &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} dx = \int_0^{\pi/2} |\cos x - \sin x| dx \\ &= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x) dx \\ &= \sin x + \cos x \Big|_0^{\pi/4} - (\cos x + \sin x) \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = 2\sqrt{2} - 2. \end{aligned}$$

$$\text{b) } J = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos x} = \sqrt{2} \int_0^{\pi} \left| \cos \frac{x}{2} \right| dx = 2\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \Big|_0^{\pi} = 2\sqrt{2}.$$

Bài 3: Tính các tích phân sau:

$$\text{a) } I = \int_{-1}^1 \frac{|x|}{x^4 - x^2 - 12} dx$$

$$\text{b) } J = \int_0^2 |x^2 + 3x - 4| dx$$

$$\text{c) } K = \int_2^4 \text{Max}(x^2, 4x - 3) dx.$$

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned} \text{a) } I &= 2 \int_0^1 \frac{x}{x^4 - x^2 - 12} dx = \frac{2}{7} \left(\int_0^1 \frac{x dx}{x^2 - 4} - \int_0^1 \frac{x dx}{x^2 + 3} \right) \\ \Rightarrow I &= \frac{1}{7} \ln \left| \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3} \right| \Big|_0^1 = \frac{2}{7} \ln \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } J &= \int_0^2 |x^2 + 3x - 4| dx = \int_0^1 (-x^2 - 3x + 4) dx + \int_1^2 (x^2 + 3x - 4) dx \\ &= \left. -\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x \right|_0^1 + \left. \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 4x \right|_1^2 = 5. \end{aligned}$$

c) Xét: $x^2 - (4x - 3) = x^2 - 4x + 3$, ta có:

$$\forall x \in [2, 3] \text{ thì } x^2 \leq 4x - 3 \quad \text{và} \quad \forall x \in [3, 4] \text{ thì } x^2 \geq 4x - 3.$$

$$K = \int_2^3 (4x - 3) dx + \int_3^4 x^2 dx = \frac{58}{3}.$$

Bài 4: Tính các tích phân sau:

$$\text{a) } I = \int_{\pi/2}^{\pi/2} \sin 2x \cdot \sin 7x dx$$

$$\text{b) } J = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx.$$

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned} \text{a) } I &= \int_{\pi/2}^{\pi/2} (\cos 5x - \cos 9x) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{5} \sin 5x - \frac{1}{5} \sin 9x \right]_{\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{5} (1+1) - \frac{1}{5} (1+1) \right]_{\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } J &= \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x (1 - \sin^2 x) d(\sin x) \\ &= \left. \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} \right|_0^{\pi/2} = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

Bài 5: Tính các tích phân

$$\text{a) } I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^6 x}{\sin^4 x} dx$$

$$\text{b) } J = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sqrt{\tan^2 x + \cot^2 x - 2} dx.$$

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned} \text{a) } I &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^4 x \cdot \cos^2 x dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right)^2 \cos^2 x dx \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\cot^2 x \cdot \frac{1}{\sin^2 x} - 2 \cot^2 x + \cos^2 x \right) dx \\ &= - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^2 x d(\cot x) - 2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx + \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} (1 + \cos 2x) dx \\ I &= -\frac{1}{3} \cot^3 x + 2 \cot x + 2x + \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} \\ I &= \frac{5\pi}{8} - \frac{23}{12}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } J &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sqrt{(\tan x - \cot x)^2} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} |\tan x - \cot x| dx \\ &= 2 \int_{\pi/6}^{\pi/3} |\cot 2x| dx = 2 \left[\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos 2x}{\sin 2x} dx - \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos 2x}{\sin 2x} dx \right]. \end{aligned}$$

III. Bài tập tự luyện:

Tính các tích phân sau:

$$1. A = \int_0^{\pi/2} \frac{4 \sin^3 x}{1 + \cos x} dx.$$

$$2. B = \int_1^5 \left(\sqrt{x+2} \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} \sqrt{x-1} \right) dx.$$

$$3. C = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx.$$

$$4. D = \int_0^1 e^{-x^3} \cdot x^2 dx.$$

$$5. E = \int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx.$$

$$6. F = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}.$$

$$7. G = \int_3^4 \frac{2x dx}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$8. H = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx.$$

$$9. I = \int_0^{\pi/4} (\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x) dx.$$

$$10. J = \int_0^{\pi/4} \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right) dx.$$

Hướng dẫn – Đáp số:

$$1) A = \int_0^{\pi/2} \frac{4(1 - \cos^2 x) \sin x}{1 + \cos x} dx = -4 \cos x + \cos 2x \Big|_0^{\pi/2} = 2.$$

$$2) B = \int_1^5 \left(\sqrt{x-1} + 1 + \left| \sqrt{x-1} - 1 \right| \right) dx = \int_1^2 2x dx + \int_2^5 2\sqrt{x-1} dx = \frac{34}{3}.$$

$$3) C = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

$$4) D = -\frac{1}{3} \int_0^1 e^{-x^3} d(-x^3) = -\frac{1}{3} e^{-x^3} \Big|_0^1 = \frac{e-1}{3e}.$$

$$5. E = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1 - \cos 2x}{2} \right]^2 dx = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos^2 2x - 2 \cos 2x) dx = \frac{3\pi}{16}.$$

$$6. F = \int_x^2 \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln |\ln x| \Big|_e^2 = \ln 2.$$

$$7. G = 6 \ln 2 - 2 \ln 3.$$

$$8. H = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = 2 - \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

$$9. I = \frac{1}{2} \ln 3 - \ln 2.$$

$$10. J = \frac{\pi - 2}{8}.$$

A. Trắc Nghiệm Về Tích Phân Cơ Bản

Câu 1: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $[a, b]$. Đẳng thức nào dưới đây là sai:

A. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$

B. $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(t) dt$

C. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dt$

D. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) d(-t)$

Câu 2: Đặt $F(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^2} dt$. Đạo hàm $F'(x)$ là hàm số nào dưới đây:

A. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

B. $\sqrt{1+x^2}$

C. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

D. $(x^2 + 1)\sqrt{1+x^2}$.

Câu 3: Cho $F(x) = \int_1^x (t^2 + t) dt$. Giá trị nhỏ nhất của $F(x)$ trên $[-1, 1]$ là:

A. $\frac{1}{6}$

B. 2

C. $-\frac{5}{6}$

D. $\frac{5}{6}$.

Câu 4: Cho $F(x) = \int_0^x \frac{t - \sqrt{3}}{t^2 + 1} dt$. Xét các mệnh đề

I. $F'(x) = \frac{x - \sqrt{3}}{x^2 + 1}$.

II. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm có $x = \sqrt{3}$.

III. Hàm số đạt cực đại tại điểm có $x = \sqrt{3}$.

Mệnh đề nào đúng

- A. Chỉ I B. Chỉ II C. I và II D. I và III.

Câu 5: Cho $F(x) = \int_{\pi/2}^x |\cos t| dt$. Đạo hàm $F'(x)$ là:

- A. $\cos x$ B. $\sin x$ C. $|\cos x|$ D. $|\sin x|$.

Câu 6: Cho $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$. Hãy chọn mệnh đề sai dưới đây :

A. $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.

B. $\int_a^b k dx = k(b - a) \quad \forall k \in \mathbb{R}$.

C. $c \in [a, b], \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

D. $\int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx$.

Câu 7: Cho biết:

$$A = \int_1^2 (3f(x) + 2g(x)) dx = 1 \text{ và } B = \int_1^2 (2f(x) - g(x)) dx = -3.$$

Giá trị của $\int_1^2 f(x) dx$ là:

- A. 1 B. 2 C. -1 D. $\frac{1}{2}$.

Câu 8: Cho $\int_1^2 f(x) dx = 1$ và $\int_1^4 f(t) dt = -3$. Giá trị của $\int_2^4 f(u) du$ là:

A. - 2

B. - 4

C. 4

D. 2

Câu 9: Hãy chọn mệnh đề sai dưới đây

A. $\int_0^1 x^2 dx \geq \int_0^1 x^3 dx$.

B. Đạo hàm của $F(x) = \int_1^x \frac{dt}{1+t}$ là $F'(x) = \frac{1}{1+x}$ ($x > 0$).

C. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-a, a]$ thì: $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

D. Nếu $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$.

Câu 10: Hãy chọn mệnh đề đúng dưới đây:

A. $\int_a^b \sin x dx \leq b - a$

B. $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x} > \frac{\pi}{4}$

C. $\int_0^1 x^2 dx \leq \int_0^1 x^3 dx$

D. $\int_0^{\pi/4} \sin x dx > \int_0^{\pi/4} \cos x dx$.

Câu 11: Cho $F(x) = \int_{-1}^x \frac{e^t}{e^t - 1} dt$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng:A. $F(x)$ tăng trên $(-\infty, 0)$.B. $F(x)$ giảm trên $(-\infty, 0)$.C. Phương trình $F(x) = 0$ vô nghiệm trên $(-\infty, 0)$.D. $\forall x \in (-1, 0), F(x) \geq 0$.**Câu 12:** Để $\int_1^k (k - 4x) dx = 6 - 5k$ thì giá trị của k là:A. $k = 1$ B. $k = 2$ C. $k = 3$ D. $k = 4$.**Câu 13:** Để $\int_0^x \left(\sin^2 t - \frac{1}{2} \right) dt = 0$ thì x có giá trị là:A. $x = k2\pi$ B. $x = k\pi$ C. $x = k \frac{\pi}{2}$ D. $x = (2k + 1)\pi$.

Câu 14: Cho $I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5 - 3\cos^2 x}$.

Mệnh đề nào dưới đây là đúng :

A. $\frac{\pi}{10} \leq I \leq \frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{6} \leq I \leq \frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{4} \leq I \leq \frac{\pi}{2}$ D. $0 \leq I \leq \frac{\pi}{6}$.

Câu 15: Giá trị tích phân $\int_1^2 |x^2 - x| dx$ là:

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 6.

Câu 16: Giá trị tích phân $\int_0^2 \min(x^2, x) dx$ là:

A. $\frac{11}{6}$ B. $\frac{17}{6}$ C. $\frac{15}{6}$ D. $\frac{13}{6}$.

Câu 17: Giá trị tích phân $\int_0^2 \frac{e^x}{e^x + 1} dx$ là:

A. $\frac{1}{2} \ln(1 + e)$ B. $\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$ C. $2 \ln(1 + e)$ D. $\ln \frac{2}{1+e}$.

Câu 18: Giá trị tích phân $\int_0^2 |x - 1| dx$ là:

A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2.

Câu 19: Giá trị tích phân $\int_0^{\pi/3} \sin^3 x \cdot \cos x dx$ là:

A. $\frac{1}{16}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{1}{4}$ D. 4.

Câu 20: Giá trị tích phân $\int_{-1}^0 \frac{x dx}{1 + |x|}$ là:

A. $1 + \ln 2$ B. $\ln 2 - 1$ C. $2 \ln 2$ D. $\frac{1}{2} \ln 2 + 1$.

Câu 21: Giá trị tích phân $\int_0^{\pi/2} (e^{\sin x} + \cos x) \cos x dx$ là:

- A. $\frac{\pi}{4} + e - 1$ B. $\frac{\pi}{4} + 1$ C. $e - 1$ D. $\frac{\pi}{4} - 1$.

Câu 22: Giá trị tích phân $\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$ là:

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $4\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 23: Giá trị tích phân $\int_0^{2\pi} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx$ là:

- A. $-\ln 2$ B. $2 \ln 2$ C. $\frac{1}{2 \ln 2}$ D. $\ln 2$.

Câu 24: Giá trị tích phân $\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin x} dx$ là:

- A. $2\sqrt{2} - 2$ B. $2\sqrt{2} + 2$ C. $4(\sqrt{2} - 1)$ D. $4(\sqrt{2} + 1)$.

Câu 25: Giá trị tích phân $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} dx$ là:

- A. $\frac{1}{3} \ln 3$ B. $\frac{1}{2} \ln 2$ C. $2 \ln 2$ D. $3 \ln 3$

B. Hướng dẫn giải trắc nghiệm về tích phân cơ bản

Câu 1: Dựa vào định nghĩa tích phân thì câu C sai.

Câu 2: Áp dụng tính chất $F'(x) = \int_a^x f(t) dt$ là 1 nguyên hàm của $f(x)$ do đó:

$$F'(x) = f(x) = \sqrt{1 + x^2}. \text{ Chọn câu B.}$$

Câu 3: $F'(x) = x^2 + x$, $F'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$

$$I(x) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \Big|_1^x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{6}$$

$$F(-1) = -\frac{2}{3}, F(0) = -\frac{5}{6}, F(1) = 0$$

$$\min F(x) = -\frac{5}{6}. \text{ Chọn câu C.}$$

Câu 4: $F'(x) = \frac{x - \sqrt{3}}{x^2 + 1}$ (I) đúng

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}.$$

Xét dấu $F'(x)$ ta có $x = \sqrt{3}$ là hoành độ cực tiểu: II đúng. Chọn câu C.

Câu 5: Đặt $f(t) = |\cos t|$ thì $F(x)$ là 1 nguyên hàm của $f(x)$, do đó:

$$F'(x) = f(x) = |\cos x|. \text{ Chọn câu C.}$$

Câu 6: Theo tính chất của tích phân thì câu sai là D.

Câu 7: $A + 2B = \int_1^2 (3f(x) + 2f(x))dx = -5 \Rightarrow \int_1^2 f(x)dx = -1$. Chọn câu C.

Câu 8: $\int_1^4 f(t)dt = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^4 f(u)du \Leftrightarrow -3 = 1 + \int_2^4 f(u)du$

Vậy: $\int_2^4 f(u)du = -4$. Chọn câu B.

Câu 9: $x \in [0,1] \Rightarrow x^2 \geq x^3 \Rightarrow (A)$ đúng.

$$\left[\int_1^x \frac{dt}{1+t} \right] = \frac{1}{1+x}, (B) \text{ đúng.}$$

Tính chất của tích phân $\Rightarrow D$ đúng.

Câu C sai (chỉ đúng đối với hàm số chẵn).

Câu 10: $\int_a^b \sin x dx \leq \int_a^b dx = b - a$ A đúng.

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{4} \right] \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{\cos x} \leq \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x} \leq \sqrt{2} \frac{\pi}{4}, B \text{ sai.}$$

$$x \in [0,1] \Rightarrow x^2 \geq x^3 \Rightarrow \int_0^1 x^2 dx \geq \int_0^1 x^3 dx : C \text{ sai.}$$

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] : \cos x \geq \sin x \Rightarrow \int_0^{\pi/4} \cos x dx \geq \int_0^{\pi/4} \sin x dx : D \text{ sai.}$$

Chọn câu A.

Câu 11:

$$\text{Đề ý } F'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}.$$

$$x \in (-\infty, 0) \Rightarrow F'(x) < 0 \Rightarrow F(x) \text{ giảm trên } (-\infty, 0). B \text{ đúng.}$$

$$F(-1) = \int_{-1}^{-1} \frac{e^t}{e^t - 1} dt = 0 \Rightarrow F(x) = 0 \text{ có nghiệm } x = -1. C \text{ sai.}$$

$$x \in (-1, 0) \Rightarrow F(x) < 0. D \text{ sai. Chọn câu B.}$$

$$\text{Câu 12: } \int_1^k (k - 4x) dx = 6 - 5k \Leftrightarrow kx - 2x^2 \Big|_1^k = 6 - 5k \Leftrightarrow k^2 - 4k + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = 2. \text{ Chọn câu B.}$$

$$\text{Câu 13: } \int_0^x \left(\sin^2 t - \frac{1}{2} \right) dt = -\frac{1}{2} \int_0^x \cos 2t dt = -\frac{1}{4} \sin 2t \Big|_0^x = 0$$

$$\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x + k\pi \Leftrightarrow x = k \frac{\pi}{2}. \text{ Chọn câu C.}$$

$$\text{Câu 14: Đề ý: } \frac{1}{5} \leq \frac{1}{5 - 3\cos^2 x} \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} \left(\frac{\pi}{2} \right) \leq I \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right) \Leftrightarrow \frac{\pi}{10} \leq I \leq \frac{\pi}{4}. \text{ Chọn câu A.}$$

Câu 15:

$$\int_0^2 |x^2 - x| dx = \int_0^1 (x - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 - x) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = 1.$$

Chọn câu C.

Câu 16: $x \in [0, 2]$ $\min(x^2, x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \in (0, 1) \\ x & \text{khi } x \in (1, 2) \end{cases}$

$$\int_0^2 \min(x^2, x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x dx = \frac{11}{6}. \text{ Chọn câu A.}$$

Câu 17: $\int_0^1 \frac{e^x dx}{e^x + 1} = \int_0^1 \frac{d(e^x + 1)}{e^x + 1} = \ln|e^x + 1| \Big|_0^1 = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right).$ Chọn câu B.

Câu 18: $\int_0^2 |x-1| dx = \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^2 (x-1) dx = 1.$ Chọn câu A.

Câu 19: $\int_0^{\pi/4} \sin^3 x \cos x dx = \int_0^{\pi/4} \sin^3 x d(\sin x) = \frac{1}{4} \sin^4 \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{16}.$

Chọn câu A.

Câu 20: $x \in [-1, 0] \Rightarrow |x| = -x$

$$\int_{-1}^0 \frac{x dx}{1+|x|} = \int_{-1}^0 \left(-1 + \frac{1}{1-x}\right) dx = -x - \ln|1-x| \Big|_{-1}^0 = \ln 2 - 1. \text{ Chọn câu B.}$$

Câu 21: $\int_0^{\pi/2} (e^{\sin x} + \cos x) \cos x dx = \int_0^{\pi/2} e^{\sin x} d(\sin x) + \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx$
 $= e^{\sin x} \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x\right) \Big|_0^{\pi/2} = e - 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + e - 1.$

Chọn câu A.

Câu 22: $\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos 2x} dx = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} |\sin x| dx = \sqrt{2} \left[\int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x dx \right]$
 $= \sqrt{2} \left[-\cos \Big|_0^{\pi} + \cos \Big|_{\pi}^{2\pi} \right] = 4\sqrt{2}. \text{ Chọn câu B.}$

Câu 23: $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} dx = - \int_0^{\pi/2} \frac{d(1+\cos^2 x)}{1+\cos^2 x} = -\ln|1+\cos^2 x| \Big|_0^{\pi/2} = \ln 2.$

Chọn câu D.

Câu 24:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin x} dx &= \int_0^{\pi} \left| \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right| dx = \int_0^{\pi/2} \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} dx \\ &= 2 \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} + 2 \left(-\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) \Big|_{\pi/2}^{\pi} = 4(\sqrt{2} - 1). \text{ Chọn câu C.} \end{aligned}$$

Câu 25:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{(\cos x + \sin x)^2} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx = \ln |\sin x + \cos x| \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2} \ln 2.$$

Chọn câu B.

§3 Vấn đề 3: CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN

I. Phương pháp đổi biến số :

A. Tóm tắt lý thuyết

* **Định lý:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$

Nếu: + Hàm số $x = \mu(t)$ có đạo hàm liên tục trên $[a, b]$
 + Hàm số $f(t)$ xác định trên $[a, b]$
 + $\mu(\alpha) = a$; $\mu(\beta) = B$

Thì: $\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} [\mu(t)] \mu'(t) dt.$

B. Các áp dụng cơ bản:

1. Tính tích phân bằng phương pháp đổi biến

PP: Dạng 1:

+ Đặt $x = \mu(t)$ thỏa điều kiện của công thức
 + Biến đổi: $f(x)dx = f[\mu(t)] \mu'(t) dt = g(t) dt$
 + Tìm một nguyên hàm của $g(t)$ rồi áp dụng

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt = G(t) \Big|_{\alpha}^{\beta}$$

Chú ý: Đối với dạng có chứa $(a^2 - x^2)$

Thì đặt: $x = a \sin t$, dạng chứa $(a^2 + x^2)$ đặt $x = atg t$.

Dạng 2:

+ Đặt $t = v(x) \rightarrow x = g(t)$, đổi cận

+ Biến đổi $f(x) dx = g(t) dt$

$$+ \text{ Suy ra } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(t) dt = G(t) \Big|_a^b$$

2. Chứng minh đẳng thức tích phân:

PP: Để chứng minh đẳng thức dạng $\int_a^b f(\mu(x)) dx = \int_a^b f(v(x)) dx$ ta đổi biến: $\mu(t) = v(x)$ rồi biến vế này thành vế kia.

Các dạng thường gặp

a) $\int_a^b f(\sin x) dx = \int_a^b g(\sin x) dx$;

$$\int_a^b f(\cos x) dx = \int_a^b g(\cos x) dx \text{ thì đổi biến số đặt } t = \pi - x.$$

b) $\int_a^b f(\sin x) dx = \int_a^b g(\cos x) dx$, đặt $t = \pi/2 - x$.

c) Đẳng thức liên quan tính chất hàm số chẵn, lẻ thì đặt $t = -x$.

C. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Tính các tích phân sau:

a) $A = \int_0^{\sqrt{2}} x^5 \sqrt{1+x^2} dx$

b) $B = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin 4x}{\sin^6 x + \cos^6 x} dx$

c) $D = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x \sqrt{1+\cos x}}$

d) $D = \int_0^2 \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx$.

Hướng dẫn giải:

a) Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow x^2 = t^2 - 1 \Rightarrow x dx = t dt$

$$x = 0 \Rightarrow t = 1; x = \sqrt{2} \Rightarrow t = \sqrt{3}$$

$$A = \int_1^{\sqrt{3}} (t^2 - 1)^2 \cdot t dt = \int_1^{\sqrt{3}} (t^6 - 2t^4 + t^2) dt = \frac{t^7}{7} - \frac{2}{5}t^5 + \frac{t^3}{3} \Big|_1^{\sqrt{3}}$$

$$A = \frac{403}{105}$$

$$b) \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x, \text{ do đó: } B = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin 2x \cos 2x}{1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x} dx$$

$$\text{Đặt } t = \sin 2x \Rightarrow B = 4 \int_0^1 \frac{t dt}{4 - 3t^2} = -\frac{2}{3} \int_0^1 \frac{d(4 - 3t^2)}{4 - 3t^2}$$

$$= -\frac{2}{3} \ln |4 - 3t^2|_0^1 = \frac{4}{3} \ln 2.$$

$$c) C = \int_1^2 \frac{\sin x}{\sin^2 x \sqrt{1 + \cos x}} dx = \int_1^2 \frac{\sin x}{(1 - \cos^2 x) \sqrt{1 + \cos x}} dx$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1 + \cos x} \Rightarrow t^2 = 1 + \cos x \Rightarrow 2t dt = -\sin x dx$$

$$x = \pi/3 \rightarrow t = \sqrt{\frac{3}{2}}; \quad x = \pi/2 \rightarrow t = 1$$

$$C = \int_{\sqrt{3/2}}^1 \frac{-2t dt}{1 - (t^2 - 1)^2} = \int_{\sqrt{3/2}}^1 \frac{2}{t^2(t^2 - 2)} dt = 2 \left[\int_{\sqrt{3/2}}^1 \left(\frac{1}{t^2 - 2} - \frac{1}{t^2} \right) dt \right]$$

$$= 2 \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\ln \left| \frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}} \right| + \frac{1}{t} \right) \right]_{\sqrt{3/2}}^1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{(2 + \sqrt{3})(\sqrt{2} - 1)}{(2 - \sqrt{3})(\sqrt{2} + 1)} \right| + 1 - \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$d) \text{ Đặt } t = \sqrt[3]{3x+1} \Leftrightarrow t^3 = 3x+1 \Rightarrow t^2 dt = dx$$

$$x = 0 \rightarrow t = 1; \quad x = \frac{t}{3} \rightarrow t = 2$$

$$D = \int_1^2 \frac{(t^3 + 2)t^2}{3t} dt = \frac{1}{3} \int_1^2 (t^4 + 2t) dt = \frac{4}{3} \left(\frac{t^5}{5} + t^2 \right) \Big|_1^2 = \frac{46}{15}.$$

Bài 2: Tính các tích phân sau:

$$a) A = \int_0^1 x^3 \sqrt{1 - x^2} dx$$

$$b) B = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1 + x^2)^2}$$

$$c) C = \int_1^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} dx$$

$$d) D = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Hướng dẫn giải:

a) Đặt $x = \sin t \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow dx = \cos t dt$

$$x = 0 \rightarrow t = 0; x = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t - \cos^2 t \cdot \sin t dt$$

$$= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) \cos^2 t d(\cos t) = \frac{\cos^5 t}{5} - \frac{\cos^3 t}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{15}.$$

b) Đặt $x = \operatorname{tg} t \Rightarrow dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$

$$x = -1 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{4}$$

$$x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}.$$

$$B = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t \cdot dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

c. $C = \int_1^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1} dx = \int_1^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 1} dx = \int_1^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \frac{d\left(x - \frac{1}{x}\right)}{1 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}$

$$\text{Đặt } x - \frac{1}{x} = \operatorname{tg} t \Rightarrow d\left(x - \frac{1}{x}\right) = (1 + \operatorname{tg}^2 t) dt$$

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{4}$$

$$x = 1 \rightarrow t = 0. \text{ Do đó } C = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{4}.$$

d. Đặt $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$

$$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{6}; x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$$

$$D = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 t \cos t dt}{\sqrt{\cos^2 t}} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2t \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}$$

$$D = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Bài 3:

Tính các tích phân sau:

$$a) A = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^6(1+x^2)}$$

$$b) B = \int_1^4 \frac{\sqrt{2x+1}}{2x+3+3\sqrt{2x+1}} dx$$

$$c) C = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$d). D = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{(e^x + 1)\sqrt{e^x - 1}}.$$

Hướng dẫn giải:

$$a). A = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^6(1+x^2)}$$

$$\text{Đặt } x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t^2}$$

$$\Rightarrow A = -\int_{\sqrt{3}}^1 \frac{t^6}{t^2+1} dt = -\int_{\sqrt{3}}^1 \left(t^4 - t^2 + 1 + \frac{1}{1+t^2} \right) dt$$

$$I = \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + t \int_{\sqrt{3}}^1 + \int_{\sqrt{3}}^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\text{Xét } I = \int_{\sqrt{3}}^1 \frac{dt}{1+t^2} \text{ Đặt } t = \tan x \Rightarrow I = \frac{\pi}{12}.$$

$$\text{Do đó: } A = \frac{117 - 41\sqrt{3}}{135} + \frac{\pi}{12}.$$

$$b) \text{ Đặt } t = \sqrt{2x+1} \Rightarrow B = \int_1^3 \left(1 - \frac{3t+2}{t^2+3t+2} \right) dt$$

$$B = 2 + \left[-4 \ln|t+2| + \ln|t+1| \right]_1^3 = 2 + \ln 2 + 4 \ln \frac{3}{4}.$$

c) Đặt $x = \frac{1}{\cos t} \Leftrightarrow \cos t = \frac{1}{x} \Rightarrow -\sin t dt = -\frac{1}{x^2} dx$

$$C = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t + \sin t}{\cos^2 t \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1}} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dt = \frac{\pi}{12}.$$

d) Đặt $t = \sqrt{e^x - 1} \Rightarrow dt = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} dx$

$$x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \ln 3 \Rightarrow t = \sqrt{2}$$

$$D = \int_0^2 \frac{dt}{t^2 + 2} \text{ Đặt } t = \sqrt{2} \tan x \Rightarrow D = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

Bài 4: Cho f liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa: $f(x) + f(-x) = \sin 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Tính: $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$

Hướng dẫn giải:

Đặt $t = -x \Rightarrow dx = -dt$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(-t) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x) dx$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } 2I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f(x) + f(-x)) dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = 0 \Rightarrow I = 0. \end{aligned}$$

Bài 5: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5 \cos x - 4 \sin x}{(\cos x + \sin x)^3} dx.$

Hướng dẫn giải:

Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow dx = -dt$

$$I = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{5 \sin t - 4 \cos t}{(\sin t + \cos t)^3} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5 \sin x - 4 \cos x}{(\cos x + \sin x)^3} dx.$$

$$\text{Do đó: } 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + \sin x}{(\cos x + \sin x)^3} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(\cos x + \sin x)^2}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{1}{4} \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Bài 6: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \operatorname{tg} x) dx$.

Hướng dẫn giải:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left(\frac{\sin x + \cos x}{\cos x} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x + \cos x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx.$$

$$\text{Xét } J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x + \cos x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right) dx = \frac{1}{2} \ln 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right) dx$$

$$\text{Xét } k = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right) dx. \text{ Đặt } t = \frac{\pi}{4} - x \Rightarrow k = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx.$$

$$\text{Thay vào } I \text{ ta được: } I = \frac{1}{2} \ln 2 \cdot x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

Bài 7: Tính: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{(1 + \sin x)^{1 + \cos x}}{1 + \cos x} dx$.

Hướng dẫn giải:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos x) \ln(1 + \sin x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \cos x) dx.$$

$$\text{Xét } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos x) \ln(1 + \sin x) dx \text{ Đặt } t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow dx = -dt.$$

$$J = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1 + \sin t) \ln(1 + \cos t) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \cos x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ln(1 + \cos x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \cos x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ln(1 + \cos x) dx.$$

Thay vào I ta có:

$$I = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \cos x) d(1 + \cos x) = - \int_2^1 \ln x dx = (x \ln x - x) \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - 1.$$

Bài 8:

Chứng minh: $\int_0^a xf(x)dx = \frac{a}{2} \int_0^a f(x)dx$ với f là hàm số liên tục trên $[0, a]$

và $f(a-x) = f(x)$.

Hướng dẫn giải:

Đặt $t = a - x \Rightarrow dx = -dt$

$x = 0 \Rightarrow t = a, x = a \Rightarrow t = 0$

$$I = \int_0^a xf(x)dx = - \int_a^0 (a-t)f(a-t)dt = \int_0^a (a-x)f(a-x)dx$$

$$= \int_0^a af(x)dx - \int_0^a xf(x)dx$$

$$\text{Do đó: } 2I = a \int_0^a f(x)dx \Leftrightarrow I = \frac{a}{2} \int_0^a f(x)dx.$$

Bài 9: Cho f là hàm số liên tục trên $[0, 1]$. Chứng minh:

$$\text{a) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx \quad \text{b) } \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$$

$$\text{c) Tính } I = \int_0^1 x \sin^2 x dx.$$

Hướng dẫn giải:

$$\text{a) Đặt } t = \pi - x \Rightarrow dt = -dx$$

$$I = \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = - \int_{\pi}^0 (\pi-t)f(\sin t)dt = \int_0^{\pi} (\pi-x)f(\sin x)dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} f(\sin x)dx - \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx \Rightarrow 2I = \pi \int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

$$\text{Vậy: } \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$$

$$\text{b) Đặt } t = \pi - x$$

$$J = \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = - \int_{\pi}^0 (\pi-t)f(\sin t)dt = \int_0^{\pi} (\pi-x)f(\sin x)dx = \pi$$

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)dx - \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx \Rightarrow J = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

$$J = \frac{\pi}{2} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)dx \right]$$

$$\text{Vi } \int_0^{\pi} f(\sin x) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x) dx \quad (\text{Đặt } t = \pi - x) \Rightarrow J = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx.$$

$$\text{c) } I = \int_0^{\pi} x \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

Bài 10:

Cho f liên tục trên $[-a, a]$.

a) Chứng minh nếu f là hàm số lẻ thì $I = \int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

b) Chứng minh nếu f là hàm số chẵn thì: $I = \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

c) Tính $A = \int_1^2 \ln^5 [x + \sqrt{1+x^2}] dx$.

Hướng dẫn giải:

a. Đặt $t = -x$

$$I = \int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$$

$$\text{Xét } J = \int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_0^a f(-x) dx = \int_0^a -f(x) dx \quad (f \text{ lẻ}).$$

$$\text{Do đó: } I = - \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0.$$

b. Tương tự: $J = \int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_0^a f(-x) dx = \int_0^a f(x) dx \quad (f \text{ chẵn}).$

$$\text{Do đó } I = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

c. Để ý $f(x) = \ln^5 (x + \sqrt{1+x^2})$ là hàm số lẻ do đó: $A = 0$.

Bài 11:

Cho hàm số f liên tục trên $[a, b]$ thỏa: $f(x) = f(a+b-x)$.

$$\text{Chứng minh: } \int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

$$\text{Áp dụng: Tính } I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} x \cos^4 x \sin x dx.$$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Đặt } t = a + b - x \Rightarrow dx = -dt$$

$$X = a \Rightarrow t = b; x = b \Rightarrow t = a$$

$$I = \int_a^b xf(x)dx = - \int_b^a (a+b-t)f(a+b-t)dt = \int_a^b (a+b)f(t)dt - \int_a^b tf(t)dt$$

$$2I = (a+b) \int_a^b f(x)dx \Rightarrow I = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx$$

$$\text{Áp dụng: } f(x) = \cos^4 x \cdot \sin x \text{ thoà } f(\pi - x) = f(x) \text{ trên } \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right]$$

$$\text{Do đó: } I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} xf(x)dx = \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} f(x)dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} -\cos^4 x d(\cos x) = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\cos^5 x}{5} \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \cdot \frac{\pi}{5}.$$

Bài 12:

$$\text{a. Chứng minh: } I = \int_a^x \frac{f(x)}{1+a^x} = \int_0^x f(x)dx.$$

Với f là hàm liên tục trên $[-\alpha, \alpha]$ và f là hàm số chẵn.

$$\text{b. Tính: } I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{1+6^x} dx.$$

Hướng dẫn giải:

$$\text{a. Ta có: } I = \int_a^0 \frac{f(x)}{1+a^x} dx + \int_0^x \frac{f(x)}{1+a^x} dx$$

$$\text{Xét: } J = \int_a^x \frac{f(x)}{1+a^x} dx \text{ Đặt } t = -x \Rightarrow dx = -dt.$$

$$J = - \int_a^0 \frac{f(-t)}{1+a^{-t}} dt = \int_0^x \frac{f(t)}{\frac{a^t}{a^t} + 1} dt$$

$$J = \int_0^x \frac{a^x \cdot f(x)}{1+a^x} dx$$

$$\text{Do đó: } J = \int_0^x \frac{a^x f(x)}{1+a^x} dx + \int_0^x \frac{f(x)}{1+a^x} dx = \int_0^x \frac{(1+a^x)f(x)}{1+a^x} dx$$

$$I = \int_0^x f(x)dx \Rightarrow \text{đpcm.}$$

b. Áp dụng a. ta có:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin^6 x + \cos^6 x) dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x) dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 4x) dx = \frac{5\pi}{32}.$$

D. Bài tập tự luyện:

Bài 1: Tính các tích phân sau:

a. $A = \int_0^1 \frac{x^3}{x + \sqrt{1+x^2}} dx$

b. $B = \int_{\sqrt{7}}^4 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$

c. $C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$

d. $D = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + \cos x}{4 - \sin^2 x} dx.$

Bài 2. Tính các tích phân sau:

a. $A = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx$

b. $B = \int \frac{\sqrt{1+\ln^2 x}}{x} \ln x dx$

c. $C = \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$

d. $D = \int_2^3 \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}.$

Bài 3.

a. Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Chứng minh: $\int_0^a x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} x f(x) dx.$

b. Chứng minh: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x dx}{\cos^n x + \sin^n x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\cos^n x + \sin^n x} dx.$

Suy ra giá trị của I .

c. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, tuần hoàn có chu kỳ T .

Chứng minh: $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$

E. Hướng Dẫn Đáp Số

Bài 1:

a. $A = \int_0^1 x^3 [\sqrt{1+x^2} - x] dx, \text{ đặt } t = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow A = \frac{2\sqrt{2}-1}{15}.$

b. Có thể đổi biến số bằng các phương pháp:

Đặt $t = 3\operatorname{tg} x$ hoặc đặt $t = \sqrt{x^2 + 9}$ hoặc $t = \frac{3}{x}$.

Đáp số: $B = \frac{1}{6} (\ln 7 - 2\ln 2)$.

$$c. \quad C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \text{ với } t = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \Rightarrow C = \frac{\pi}{4}.$$

$$d. \quad D = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x dx}{4 - \sin^2 x} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{4 - \sin^2 x} dx$$

$$I_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x dx}{4 - \sin^2 x} = 0$$

$$I_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin x)}{4 - \sin^2 x} = \frac{1}{2} \ln 3. \text{ Vậy } D = \frac{1}{2} \ln 3.$$

Bài 2:

$$a. \quad \text{Đặt } t = \sqrt{e^x + 1} \Rightarrow A = 2 \int_2^3 (t^2 - 1) dt = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$b. \quad \text{Đặt } t = 1 + \ln^2 x \Rightarrow dt = \frac{2 \ln x}{x} dx \Rightarrow B = \frac{1}{3} (2\sqrt{2} - 1).$$

$$c. \quad \text{Đặt } t = e^x \Rightarrow C = \int \frac{dt}{t(t+1)} = \ln \frac{2e}{e+1}.$$

$$d. \quad \text{Đặt } t = \ln(\ln x)$$

$$D = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dt}{t} = \ln t \Big|_{\ln 2}^{\ln 3} = \ln \left(\frac{\ln 3}{\ln 2} \right).$$

Bài 3:

$$a. \quad \text{Đặt } t = x^2.$$

$$b. \quad \text{Đặt } t = \frac{\Pi}{2} - x \text{ suy ra: } 2I = \int_0^{\Pi} dx \Rightarrow I = \frac{\Pi}{4}.$$

II. Phương pháp tích phân từng phần

A. Tóm tắt lý thuyết

Định lý: Nếu $u(x)$ và $v(x)$ là các hàm số liên tục có đạo hàm trên $[a, b]$ thì:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

$$\text{Hay: } \int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

B. Các áp dụng cơ bản:

Áp dụng: Tính tích phân bằng phương pháp từng phần

Phương pháp: Để tính tích phân: $I = \int f(x)dx$ ta phân tích $f(x)dx$ thành u và dv sao cho:

+ Từ dv suy ra được v bằng tích phân cơ bản.

+ $\int v du$ là tích phân đơn giản tính được.

Một số dạng thường gặp:

+ $\int P(x) \ln x dx$ Đặt $u = \ln x$, $dv = P(x)dx$

+ $\int P(x) \sin x dx$ hoặc $\int P(x) \cos x dx$.

Đặt $u = P(x)$, $dv = (\sin x)dx$ hoặc $\cos x dx$

+ $\int P(x) e^x dx$. Đặt $u = P(x)$, $dv = e^x dx$

+ $I = \int e^x \sin x dx$; $J = \int e^x \cos x dx$

Đặt $\begin{cases} u = \sin x, \text{ hoặc } u = \cos x \\ dv = e^x dx \end{cases}$ Tính hai lần

Hoặc $u = e^x$ $dv = \sin x dx$ (hoặc $dv = \cos x dx$)

C. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Tính các tích phân sau:

a. $A = \int \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx$

b. $B = \int_0^{\pi} (x+1) \sin x dx$

$$c. C = \int x e^{-2x} dx$$

$$d. D = \int_0^{\pi} e^x \cdot \cos 2x dx.$$

Hướng dẫn giải:

$$a. \text{ Đặt } u = \ln(x+1) \Rightarrow du = \frac{dx}{x+1}; \quad dv = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow v = -\frac{1}{x}.$$

$$A = -\frac{1}{x} \ln(x+1) \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)} = -\frac{1}{x} \ln(x+1) \Big|_1^2 + \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{x} \ln(x+1) + \ln \frac{x}{x+1} \Big|_1^2 = -\frac{1}{2} \ln 3 + \ln \frac{2}{3} + \ln 2 - \ln \frac{1}{2}$$

$$A = 3 \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 3.$$

$$b. \text{ Đặt } u = x+1 \Rightarrow dx = du$$

$$dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x$$

$$B = -(x+1) \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = -(x+1) \cos x + \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$B = 1 + 1 = 2.$$

$$c. \text{ Đặt } u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = e^{-2x} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2} e^{-2x}$$

$$C = -\frac{x}{2} e^{-2x} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x} dx = -\frac{x}{2} e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{3}{e^2} \right).$$

$$d. \text{ Đặt } u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$$

$$dv = \cos 2x dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$D = \frac{1}{2} e^x \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin 2x dx$$

$$\text{Xét } D' = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin 2x dx$$

$$\text{Đặt } u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$$

$$dv = \sin 2x dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2} \cos 2x$$

$$D' = \frac{1}{2} e^x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \cos 2x dx$$

$$\text{Do đó: } D = \frac{1}{2} e^x \sin 2x + \frac{1}{4} e^x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{4} D.$$

$$\frac{5}{4} D = \left(\frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \right) e^{2x} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{Do đó } D = \frac{1}{5} \left(2e^{\frac{\pi}{4}} - 1 \right).$$

Bài 2:

Tính các tích phân

$$\text{a. } I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$\text{b. } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx.$$

Hướng dẫn giải:

$$\text{a. Đặt } u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{\cos x} dx \Rightarrow I = \frac{x}{\cos x} \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x}$$

$$I = \frac{4\pi}{3} - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{4\pi}{3} - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{2 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$I = \frac{4\pi}{3} - \ln \tan \left| \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{4\pi}{3} - 2 \ln \left(\tan \left(\frac{5\pi}{12} \right) \right).$$

$$\text{b. Đặt } u = x + \sin x \Rightarrow du = (1 + \cos x) dx$$

$$dv = \frac{dx}{1 + \cos x} \Rightarrow v = \tan \frac{x}{2}$$

$$J = (x + \sin x) \tan \frac{x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos x) \tan \frac{x}{2} dx$$

$$= (x + \sin x) \tan \frac{x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} + 2.$$

Bài 3:

Tính $I = \int_0^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \sin \sqrt{x} dx$ và $J = \int_1^{10} x \lg^2 x dx$.

Hướng dẫn giải:

a. Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt$.

$$I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$$

Đặt $u = x \Rightarrow du = dx$

$$dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x$$

$$I = 2 \left[-x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \right] = 2 \left[-x \cos x + \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right] = 2.$$

Ta có: $J = \frac{1}{\ln^2 10} \int_1^{10} x \ln^2 x dx$

Đặt $u = \ln^2 x \rightarrow du = 2 \ln x \frac{dx}{x}$

$$dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

$$J = \frac{x^2}{2} \ln^2 x \Big|_1^{10} - \int_1^{10} x \ln x dx = \left(\frac{x^2}{2} \ln^2 x - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} \right) \Big|_1^{10}$$

Vậy $J = 50 - \frac{50}{\ln 10} + \frac{99}{4 \ln^2 10}$.

Bài 4: Tính các tích phân sau:

a. $A = \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$

b. $B = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x \ln(\tan x) dx.$

Hướng dẫn giải:

a. Đặt $u = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx \Rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$A = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

$$= [x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}] \Big|_0^1 = \ln(1+\sqrt{2}) + 1 - \sqrt{2}.$$

b) Đặt $u = \ln(\tan x) \Rightarrow du = \frac{dx}{\sin x \cos x}$

$$dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x$$

$$B = -\cos x \ln(\tan x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x} = \frac{3}{4} \ln \frac{1}{3} - \ln(\sqrt{2} - 1).$$

Bài 5: Chứng minh: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x \cos 6x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x \sin 6x dx$

Và tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \cos 7x dx.$

Hướng dẫn giải:

Đặt $u = \cos^6 x \Rightarrow du = -6\cos^5 x \sin x dx$

$$dv = \cos 6x dx \rightarrow v = \frac{1}{6} \sin 6x.$$

Do đó: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x \cos 6x dx = \frac{1}{6} \cos^6 x \sin 6x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x \sin 6x dx.$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x \cos 6x dx = 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x \sin 6x dx \Rightarrow \text{đpcm.}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \cdot \cos(6x+x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x (\cos x \cos 6x - \sin x \sin 6x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x \cdot \cos 6x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \cdot \sin x \sin 6x dx = 0.$$

D. Bài tập tự luyện:

Bài 1: Tính các tích phân sau:

a. $A = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} x \sin \sqrt{x} dx$

b. $B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \cdot \cos 2x dx$

$$c. C = \int x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$$

$$d. D = \int \frac{\sqrt[4]{x}}{1 + \sqrt{x}} dx.$$

Bài 2: Tính các tích phân sau:

$$a. A = \int \frac{x \ln x}{(1 + x^2)^2} dx$$

$$b. B = \int e^{x + x \ln x} dx$$

$$c. C = \int \cos(\ln x) dx$$

$$d. D = \int_0^1 e^{2x} \cdot \sin^2 x dx.$$

Bài 3. Tính $I = \int \frac{a - x^2}{(a + x^2)^2} dx$:

Bài 4: Cho $a > 0$. Chứng minh $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$ là một nguyên hàm của

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Áp dụng: Tính $I = \int_0^a \sqrt{x^2 + a^2} dx$.

E. Hướng Dẫn Đáp Số

Bài 1:

a. Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow A = 2 \int_2^{\pi} t^3 \sin t dt = 2 \int_2^{\pi} x^3 \sin x dx$.

Đặt $u = x^3$, $dv = \sin x dx$ thực hiện 3 lần suy ra :

$$A = \frac{3}{2} \pi^2 - 12.$$

b. Đặt $u = x^2$, $dv = \cos x dx$.

$$B = \frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{4}.$$

c.
$$\left. \begin{array}{l} u = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ dv = x^2 dx \end{array} \right\} C = 3 \ln 3 - \frac{10}{3} \ln 2 + \frac{1}{6}$$

d. $t = \sqrt[4]{x} \Rightarrow D = 4 \int (t^2 - 1 + \frac{1}{t^2 + 1}) dt = \pi - \frac{8}{3}$

Bài 2: a. Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$

$$dv = \frac{x dx}{(1+x^2)^2} \Rightarrow v = \frac{-1}{2(x^2+1)} \Rightarrow A = \frac{13}{20} \ln 2 - \frac{1}{4} \ln^5.$$

$$b. e^{x+\ln x} = e^x \cdot e^{\ln x} = x e^x$$

$$\text{Đặt } u = x, dv = e^x dx;$$

$$B = e^x(x-1) \Big|_1^e$$

$$c. u = \ln x \Leftrightarrow x = e^u \Rightarrow dx = e^u du$$

$$C = \int_0^\pi e^u \cos u du = \int_0^\pi e^x \cdot \cos x dx$$

$$D = \int_0^\pi e^{2x} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{2x} dx - \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{2x} \cdot \cos 2x dx.$$

$$\text{Bài 3: } I = \int_0^b \frac{x^2 + a - 2x^2}{(a+x^2)^2} dx = \int_0^b \frac{dx}{a+x^2} - \int_0^b \frac{2x^2}{(a+x^2)^2} dx$$

$$\text{Xét } J = \int_0^b \frac{2x^2 dx}{(a+x^2)^2}, \text{ đặt } u = x, dv = \frac{2x}{(a+x^2)} dx$$

$$\text{Do đó: } I = \frac{b}{a+b^2} \Rightarrow J = -\frac{x}{a+x^2} \Big|_0^b + \int_0^b \frac{dx}{a+x^2}.$$

$$\text{Bài 4: Chứng minh } y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$I = \int_0^a \sqrt{x^2+a^2} dx = \int_0^a \frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \int_0^a \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+a^2}} + a^2 \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

$$\text{Vì } \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) \Big|_0^a = \ln(1+\sqrt{2})a - \ln a = \ln(1+\sqrt{2})$$

$$\text{Xét } J = \int_0^a \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\text{Đặt } u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} dx \Rightarrow v = \sqrt{x^2+a^2}.$$

$$\text{Do đó } J = \frac{a^2}{2} (\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})) .$$

III. Tích Phân Quy Nạp – Giới Hạn Của Tích Phân

A. Tóm tắt lý thuyết

Đối với các tích phân I_n phụ thuộc vào số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$ ta thường dùng phương pháp tích phân từng phần (trừ vài trường hợp đặc biệt) ta tìm được hệ thức giữa I_n với $I_{n-1}, I_{n-2}, \dots$ gọi là công thức quy nạp (truy hồi).

Từ công thức quy nạp của I_n để biểu diễn I_n theo n ta cho n các giá trị giảm dần rồi rút gọn.

Thường dùng định lý về giới hạn: Nếu $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$

và $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = a$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$.

B. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Cho $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$.

a. Tìm công thức quy nạp của I_n

b. Tính I_n

Hướng dẫn giải:

a. Đặt $u = \sin^{n-1} x \Rightarrow du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx$

$dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x$

$$I_n = -\cos x \cdot \sin^{n-1} x \Big|_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x dx$$

$$I_n = (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n).$$

$$\text{Do đó: } I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

b. n chẵn: $I_n = \frac{(n-1)(n-3)}{n} \dots \frac{1}{2} I_0$

$$I_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I_n = \frac{1.3.5\dots n-1}{2.4.6\dots n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

n lẻ: $I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \dots \frac{2}{3} I_1$

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = 1 \Rightarrow I_n = \frac{2.4.6\dots n-1}{3.5.7\dots n}$$

Bài 2: Cho $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$.

a. Tìm hệ thức giữa I_n và I_{n-1} .

b. Tính I_n theo n.

Hướng dẫn giải:

a. Đặt $u = (1-x^2)^n \Rightarrow du = -2nx(1-x^2)^{n-1} dx$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$I_n = x(1-x^2)^n \Big|_0^1 + 2n \int_0^1 x^2(1-x^2)^{n-1} dx$$

$$= 0 + 2n \int_0^1 (x^2 - 1 + 1)(1-x^2)^{n-1} = -2n \int_0^1 (1-x^2)^n dx + 2n \int_0^1 (1-x^2)^{n-1} dx$$

$$\Leftrightarrow I_n = -2n[I_n - I_{n-1}] \Leftrightarrow I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$$

Chú ý có thể đặt $x = \sin t \Rightarrow I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x dx$.

2. Ta coi: $I_n = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \dots \frac{2}{3} I_0$

Với $I_0 = \int_0^1 dx = 1 \Rightarrow I_n = \frac{2.4.6\dots 2n}{3.5.7\dots 2n+1}$

Bài 3: Cho $I_n = \int_0^{\pi/4} t g^x x dx$

a. Chứng minh: $I_n > I_{n+1}$

b. Tìm hệ thức giữa I_n và I_{n+2}

Hướng dẫn giải:

$$a. \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \tan^n x \geq \tan^{n+1} x \Rightarrow I_n > I_{n+1}.$$

$$b. \quad I_{n+2} = \int_0^{\pi/4} \tan^n x [1 + \tan^2 x - 1] dx = \int_0^{\pi/4} \tan^n x d(\tan x) - \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx.$$

$$I_{n+2} = \frac{1}{n+1} \tan^{n+1} x \Big|_0^{\pi/4} - I_n \Leftrightarrow I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}.$$

Bài 4: Tìm các công thức quy nạp của các tích phân sau:

$$a. \quad I_n = \int_1^e x (\ln x)^n dx$$

$$b. \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{x+1}}.$$

Hướng dẫn giải:

$$a. \quad \text{Đặt } u = \ln^n x \Rightarrow du = n \ln^{(n-1)} x \cdot \frac{dx}{x}, \quad dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}.$$

$$I_n = \frac{x^2}{2} \ln^n x \Big|_1^e - \frac{n}{2} \int_1^e x \ln^{n-1} x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2} I_{n-1}.$$

$$\text{Vậy } I_n = \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2} I_{n-1}.$$

$$b. \quad \text{Đặt } u = x^n \Rightarrow du = n \cdot x^{n-1} dx$$

$$dv = \frac{dx}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow v = 2\sqrt{x+1}.$$

$$J_n = 2x^n \sqrt{x+1} \Big|_0^1 - 2n \int_0^1 x^{n-1} \sqrt{x+1} dx$$

$$J_n = 2\sqrt{2} - 2n \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x+1)}{\sqrt{x+1}} dx = 2\sqrt{2} - 2n[J_n - J_{n-1}]$$

$$\Leftrightarrow (2n+1) J_n + 2n J_{n-1} = 2\sqrt{2}.$$

Bài 5: Cho $K_{n,m} = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^n x}{\cos^m x} dx$. Tìm công thức quy nạp của $K_{n,m}$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Đặt } u = \sin^{n-1} x \Rightarrow du = (n-1) \sin^{n-2} x dx$$

$$dv = \frac{\sin x}{\cos^m x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{m-1} \frac{1}{\cos^{m-1} x}.$$

$$\text{Do đó: } K_{n,m} = \frac{1}{m-1} \left. \frac{\sin^{n-1} x}{\cos^{m-1} x} \right|_0^{\pi/4} - \frac{n-1}{m-1} \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^{n-2} x}{\cos^{m-2} x} dx$$

$$\Leftrightarrow K_{n,m} = \frac{1}{m-1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-m} - \frac{(n-1)}{(m-1)} K_{n-1,m-2}$$

$$\Leftrightarrow (m-1)K_{n,m} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-m} - (n-1)K_{n-2,m-2}.$$

Bài 6:

a. Tính $I_0 = \int_0^1 (2x-1)e^{x-x^2} dx$.

b. Chứng minh $\forall x \in \mathbb{N}^*$ thì $\int_0^1 (2x-1)^{2n+1} e^{x-x^2} dx = 0$.

Hướng dẫn giải:

a. $I_0 = - \int_0^1 e^{x-x^2} d(x-x^2) = -e^{x-x^2} \Big|_0^1 = 0$.

b. Đặt $I_n = \int_0^1 (2x-1)^{2n+1} e^{x-x^2} dx$

$$u = (2x-1)^{2n} \Rightarrow du = 2n(2x-1)^{2n-1} 2dx$$

$$dv = (2x-1) \cdot e^{x-x^2} dx \Rightarrow v = -e^{x-x^2}$$

$$I_n = (2x-1)^{2n} \cdot e^{x-x^2} \Big|_0^1 + 4n \int_0^1 (2x-1)^{2n-1} \cdot e^{x-x^2} dx$$

$$I_n = 0 + 4n I_{n-1}.$$

$$\text{Vì } I_0 = 0 \Rightarrow I_0 = I_1 = I_2 = \dots = I_n = 0 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài 7: Tính $I_n = \int_0^\pi \cos^n x \cdot \cos nx dx$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Đặt } u = \cos^n x \Rightarrow du = -n \cos^{n-1} x \cdot \sin x dx$$

$$dv = \cos nx dx \Rightarrow v = \frac{1}{n} \sin nx.$$

$$I_n = \frac{1}{n} \cos^n x \sin nx \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos^{n-1} x \sin x \sin nx dx$$

$$= 0 + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos^{n-1} x [\cos(n+1)x - \cos(n-1)x] dx$$

$$I_n = -\frac{1}{2} \int_0^\pi \cos^{n-1} x [\cos nx \cos x - \sin x \sin nx] dx + \frac{1}{2} I_{n-1}$$

$$\text{Do đó: } I_n = -\frac{1}{2} I_n + \frac{1}{2} I_n + \frac{1}{2} I_{n-1} \Leftrightarrow I_n = \frac{1}{2} I_{n-1}$$

$$\text{Vậy: } I_n = \frac{1}{2} I_{n-1} = \frac{1}{4} I_{n-2} = \dots = \frac{1}{2^{n-1}} I_1.$$

$$\text{Và } I_1 = \int_0^\pi \cos x \cdot \cos x dx = \frac{\pi}{2} \text{ nên } I_n = \frac{\pi}{2^n}.$$

Bài 8: Cho $I_n = \int_0^1 \frac{e^{-2nx}}{1+e^{2x}} dx$.

a. Tính I_0

b. Tính $I_n + I_{n+1}$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{a. } I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{1+e^{2x}} = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^{2x}(1+e^{2x})} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(e^{2x})}{e^{2x}(1+e^{2x})}$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^{e^2} \frac{e^2 dt}{t(t+1)} = \frac{1}{2} \int_1^{e^2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} \right) dt = \frac{1}{2} \ln \frac{t}{t+1} \Big|_1^{e^2}$$

$$I_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{2}{1+e^2}.$$

b. Ta có:

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-2nx} + e^{-2(n+1)x}}{1+e^{2x}} dx = \int_0^1 \frac{e^{-2(n+1)x} (1+e^{2x})}{1+e^{2x}} dx = \int_0^1 e^{-2(n+1)x} dx$$

$$= \int_0^1 e^{-2(n+1)x} dx$$

$$\Leftrightarrow I_n + I_{n+1} = -\frac{1}{2(n+1)} e^{-2(n+1)x} \Big|_0^1 = \frac{1}{2(n+1)x} (1 - e^{-2(n+1)})$$

Bài 9: Cho $I_n = \int_0^\pi \frac{\sin 2nx}{3 - 2\cos 2x} dx \quad (n \in \mathbb{N})$

Chứng minh: $I_n + I_{n-2} = 3 I_{n-1} \quad \forall n \geq 2$.

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } I_n + I_{n-2} &= \int_0^\pi \frac{\sin 2nx + \sin 2(n-2)x}{3 - 2\cos x} dx \\ &= \int_0^\pi \frac{2 \sin 2(n-1)x \cos 2x}{3 - 2\cos 2x} dx = \int_0^\pi \frac{3 \sin 2(n-1)x - \sin 2(n-1)x}{3 - 2\cos 2x} dx \end{aligned}$$

$$I_n = 3I_{n-1} - \int_0^\pi \sin 2(n-1)x dx = 3I_{n-1}.$$

Vậy $I_n + I_{n-2} = 3 I_{n-1}$.

Bài 10: a. Cho $I_n = \int_0^1 x^n \sin \pi x dx$. Chứng minh $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.

b. Cho $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$. Chứng minh $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = 0$.

Hướng dẫn giải:

a. Ta có: $0 \leq x^n \sin \pi x \leq x^n$

$$\text{Do đó: } 0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

$$\text{Vì } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0.$$

b. Vì $x \in [0, 1] \Rightarrow 0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n$.

$$\text{Do đó: } 0 \leq J_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} J_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} J_n = 0.$$

Bài 11: Cho $I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx$.

a. Tính I_n

b. Tìm công thức quy nạp của I_n và tính $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

Hướng dẫn giải:

a. $I_1 = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = - \int_0^1 \frac{d(1+e^{-x})}{1+e^{-x}} = - \ln(1+e^{-x}) \Big|_0^1 = \ln \frac{2e}{1+e}$.

b. Ta có: $I_n + I_{n-1} = \int_0^1 \frac{e^{-(n-1)x}(1+e^{-x})}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 e^{-(n-1)x} dx$
 $= \frac{1}{1-n} e^{-(1-n)x} \Big|_0^1 = \frac{e^{1-n} - 1}{1-n}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (I_n + I_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{1-n} - 1}{1-n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0.$$

Bài 12: Cho $I_n = \int_0^1 x^n e^{-2x} dx$.

a. Chứng minh: $I_n \geq I_{n+1}$. Tính I_{n+1} theo I_n .

b. Chứng minh: $0 \leq I_n \leq \frac{1}{(n-1)e^2} \forall n \geq 2$ Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

Hướng dẫn giải:

a. Xét $I_n - I_{n+1} = \int_0^1 x^n (1-x) e^{-2x} dx$.

$$\text{Vì } x \in [0,1] \Rightarrow x^n (1-x) \cdot e^{-2x} \geq 0 \Rightarrow I_n - I_{n+1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow I_n \geq I_{n+1} \text{ đpcm}$$

Ta có: $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-2x} dx$

Đặt $u = x^{n+1} \Rightarrow du = (n+1)x^n dx$

$$dv = e^{-2x} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2} e^{-2x}$$

$$I_{n+1} = -\frac{1}{2} x^{n+1} e^{-2x} \Big|_0^1 + \frac{n+1}{2} I_n$$

$$I_{n+1} = -\frac{1}{2e^2} + \frac{n+1}{2} I_n.$$

b. Vì: $I_n \geq I_{n+1} \Rightarrow I_n \geq \frac{1}{2e^2} + \left(\frac{n+1}{2}\right) I_n$

$$\Leftrightarrow I_n \leq \frac{1}{(n-1)e^2}, \text{ mặt khác } I_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Do đó: $0 \leq I_n \leq \frac{1}{(n-1)e^2}.$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n-1)e^2} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0.$$

Bài 13: Cho $I_n = \int_0^1 x(1-x^2)^n dx$ và $J_n = \int_0^1 x^2(1-x^2)^n dx$.

a. Chứng minh: $J_n \leq \frac{1}{2(n+1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

b. Tính: J_{n+1} theo J_n và tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{J_{n+1}}{J_n}.$

Hướng dẫn giải:

a. $I_n = -\frac{1}{2} \int_0^1 (1-x^2)^n d(1-x^2) = -\frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1$

Do đó: $I_n = \frac{1}{2(n+1)}.$

$x \in [0,1] \Rightarrow x^2 \leq x \Rightarrow J_n \leq I_n \Rightarrow J_n \leq \frac{1}{2(n+1)}, \text{ đpcm.}$

b. Ta có: $J_{n+1} = \int_0^1 x^2(1-x^2)^{n+1} dx = \int_0^1 x^2(1-x^2)^n (1-x^2) dx$

$$J_{n+1} = \int_0^1 x^2(1-x^2)^n dx$$

$$J_{n+1} = J_n - \int_0^1 x^4(1-x^2)^n dx \quad (1)$$

Mặt khác: nếu đặt $u = (1-x^2)^{n+1}$
 $dv = x^2 dx$

$$I_{n+1} = \frac{x^3}{3} (1-x^2)^{n+1} \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 x^3 (n+1)x(1-x^2)^n dx$$

$$= \frac{2}{3} (n+1) \int_0^1 x^4 (1-x^2)^n dx \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow \int_0^1 x^4 (1-x^2)^n dx = \frac{3}{2(n+1)} I_{n+1}$$

$$(1) \Rightarrow J_{n+1} = J_n - \frac{3}{2(n+1)} J_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow J_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} J_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{J_{n+1}}{J_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{2n+5} = 1.$$

C. Bài tập tự luyện:

Bài 1: Cho $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$ Chứng minh: $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} I_n$.

Bài 2: a. Cho $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^{2n} x dx$. Tìm công thức quy nạp của I_n .

b. Cho $I_n = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \right)^{2n+1} dx$, tìm công thức quy nạp của I_n .

Bài 3: Tính các tích phân sau:

a. $I_n = \int_0^1 \frac{x^3 dx}{(x^2+1)^n}$

b. $I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^x dx$.

Bài 4: a. Cho $I_{m,n} = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$.

Chứng minh: $I_{m,n} = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$.

b. Cho $m+n=10$. Hỏi với giá trị nào của m, n để $I_{m,n}$ đạt GTLN, GTNN, tại sao?

Bài 5: Đặt $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$.

a. Tìm hệ thức giữa I_n và I_{n+1} .

b. Chứng minh: $I_{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$ và tính $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

Bài 6: a. Cho $I_n = \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^n x}$. Chứng minh $(n+1) I_{n+2} - n I_n = \sqrt{3} \cdot 2^n$.

b. Cho $I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$, tìm công thức quy nạp của I_n .

D. Hướng dẫn – Đáp số

Bài 1: $u = x^{n+1}$; $dv = \sqrt{1-x} dx$.

Bài 2: a. $I_n = \int_0^{\pi/4} t g^{2x-2} x (1 + t g^2 x - 1) dx = \int_0^{\pi/4} t g^{2x-2} x d(tgx) - I_{n-1}$

$$I_n = \frac{1}{2n-1} - I_{n-1}, \text{ đpcm.}$$

b. Biến đổi: $I_n = \int_0^{\pi/4} t g^{2x+1} (\pi/4 - x) dx = \int_0^{\pi/4} t g^{2x+1} t dt \Rightarrow I_n = \frac{1}{2n} - I_{n-1}$.

Bài 3: a. $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \frac{x dx}{(1+x^2)^n} \end{cases} \Rightarrow I_n = \frac{2-n}{(n-1)(n-2)2^n}$.

b. $\begin{cases} u = (1-x)^n \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow I_n = -1 + n \cdot I_{n-1}$

$$\Rightarrow I_n = -(1 + n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + \dots + n!) + n! I_0$$

$$I_0 = \int e^x dx = e - 1 \Rightarrow I_n = (e-1)n! - (1 + n + n(n-1) + \dots + n!).$$

Bài 4: a. $\begin{cases} u = (1-x)^n \\ dv = x^m dx \end{cases} \Rightarrow I_{m,n} = \frac{n}{m+1} I_{m+1,n-1}$.

$$\text{Do đó: } I_{m,n} = \frac{n(n-1)\dots 1}{(m+1)(m+2)\dots(m+n)} \int_0^1 x^{m+n} dx$$

$$I_{m,n} = \frac{n!}{(m+1)(m+2)\dots(m+n+1)} = \frac{n!m!}{(m+n+1)!}$$

b. $m+n = 10 \Rightarrow I_{m,n} = \frac{m!(10-m)!}{11} = \frac{10!}{11} \cdot \frac{1}{C_{10}^m}$

Trong dãy C_{10}^m thì C_{10}^5 là lớn nhất và C_{10}^1 là bé nhất.

Do đó: Khi $m = n = 5$ thì $I_{(m,n)}$ đạt GTNN.

Và khi $\begin{cases} m = 0, n = 10 \\ m = 10, n = 0 \end{cases}$ thì đạt GTLN.

Bài 5: $I_{n+1} = e - (n+1) I_n$

b. $x \in [1, e] \Rightarrow 0 \leq \ln x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \ln^{n+1} x \leq \ln^n x$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0.$$

Bài 6: a. $I_n = \int_0^{\pi/3} \cos^{-n} x dx = \int_0^{\pi/3} \cos^{-n-2} x (1 - \sin^2 x) dx = I_{n+2} - \int_0^{\pi/3} \cos^{-n-2} x \sin^2 x dx$

$$\begin{cases} u = \sin x \\ dv = \cos^{-n-2} x \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \text{dpem.}$$

$$\text{b. } \begin{cases} u = (1 + x^2)^{-n} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow I_n = \frac{1}{(n-1)2^n} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}.$$

Bài 7: Lập công thức qui nạp của các tích phân sau:

$$\text{a. } I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

$$\text{b. } I_n = \int_0^{\pi/2} x^n \cos x dx$$

$$\text{c. } K_n = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n} dx$$

$$\text{d. } H_{m,n} = \int x^m \ln x dx.$$

IV. Tích phân liên kết

A. Tóm tắt lý thuyết

PP: Nếu việc tính tích phân I phức tạp ra có thể xét tích phân J sao cho các tích phân dạng $I + J$ và $I - J$ tính được sau đó giải hệ để suy ra I .

Nếu khi tính tích phân I bằng phương pháp từng phần mà xuất hiện tích phân J phức tạp có thể áp dụng phương pháp thích hợp để tính J sao cho xuất hiện tích phân có liên quan với I để từ đó suy ra kết quả.

B. Bài tập áp dụng :

Bài 1: Tính: $A = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[3]{\sin x}}{\sqrt[3]{\sin x} + \sqrt[3]{\cos x}} dx.$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Xét } B = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[3]{\cos x} dx}{\sqrt[3]{\sin x} + \sqrt[3]{\cos x}}.$$

$$\text{Ta có: } A + B = \int_0^{\pi/2} dx = \pi/2$$

Mặt khác bằng cách đặt $t = \frac{\pi}{2} - x$, ta chứng minh được $A = B$.

$$\text{Do đó: } A = \frac{\pi}{4}.$$

Bài 2: Tính $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Xét } J = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$\text{Ta có: } I + J = \int_{\pi/6}^{\pi/3} dx = \frac{\pi}{6}.$$

$$I - J = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{d(\cos x + \sin x)}{\cos x + \sin x} = \ln |\cos x + \sin x| \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = 0.$$

$$\text{Do đó: } I = J = \frac{\pi}{12}.$$

Chú ý: Có thể chứng minh $I = J$ bằng cách đặt $t = \frac{\pi}{2} - x$.

Bài 3: Tính $I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dx$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Xét } J = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx.$$

$$\text{Ta có: } I + J = \int_0^1 dx = 1.$$

$$I - J = \int_0^1 \frac{d(e^x + e^{-x})}{e^x + e^{-x}} = \ln |e^x + e^{-x}| \Big|_0^1 = \ln \frac{e^2 + 1}{2e}$$

$$\text{Do đó: } I = \frac{1}{2} \ln \frac{e^2 + 1}{2}$$

Bài 4: Tính $I = \int_0^{\pi/4} \cos^2 x \cdot \cos 2x dx$.

Hướng dẫn giải:

Xét $J = \int_0^{\pi/4} \sin^2 x \cdot \cos 2x dx$.

Ta có: $I + J = \int_0^{\pi/4} \cos 2x dx = \frac{1}{2}$.

Và $I - J = \int_0^{\pi/4} \cos^2 2x dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1 + \cos 4x}{2} dx = \frac{\pi}{8}$.

Do đó: $I = \frac{1}{16}(\pi + 4)$.

Bài 5: Đặt $I = \int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} dx$ và $J = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos^2 x dx}{\sin x + \sqrt{3} \cos x}$.

a. Tính $I - 3J$ và $I + J$.

b. Suy ra I, J và tính $k = \int_{\pi/2}^{\pi/4} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sqrt{3} \sin x} dx$.

Hướng dẫn giải:

$$I - 3J = \int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2 x - 3 \cos^2 x}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} dx = \int_0^{\pi/6} (\sin x - \sqrt{3} \cos x) dx = 1 - \sqrt{3}.$$

$$I + J = \int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) dx}{2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$\text{Do đó: } I + J = \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \right| \Big|_0^{\pi/6} = \frac{1}{4} \ln 3.$$

b. Giải hệ:
$$\begin{cases} I + J = \frac{1}{4} \ln 3 \\ I - 3J = 1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{1}{4} \left[\frac{3}{4} \ln 3 + 1 - \sqrt{3} \right]; \quad J = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4} \ln 3 + \sqrt{3} - 1 \right].$$

$$\text{Đặt } t = x - \frac{3\pi}{2} \text{ thì } K = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos(2t + 3\pi)}{\cos\left(t + \frac{3\pi}{2}\right) - \sqrt{3} \sin\left(t + \frac{3\pi}{2}\right)} dt$$

$$\Leftrightarrow K = - \int_0^{\pi/6} \frac{\cos 2t}{\sin t + \sqrt{3} \cos t} dt = \int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2 t - \cos t}{\sin t + \sqrt{3} \cos t} dt$$

$$\Leftrightarrow K = I - J = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \ln 3 + 2 - 2\sqrt{3} \right].$$

Bài 6: Cho $A = \int_0^{\pi} \cos^n x \sin x dx$ và $B = \int_0^{\pi} \cos^{n-1} x \cdot \cos nx \sin x dx$.

a. Chứng minh: $A+B=0$.

b. Tính $C = \int_0^{\pi} \cos^{n-1} x \sin(n+1)x dx$.

Hướng dẫn giải:

a. Ta tính A bằng tích phân từng phần:

Đặt: $u = \cos^n x$

$$dv = \sin x dx \Rightarrow A = -\frac{1}{n} \cos^n x \cos nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos^{n-1} x \cos nx \sin x dx$$

$$\Leftrightarrow A = 0 - B \Leftrightarrow A + B = 0.$$

b. Mặt khác:

$$A + B = \int_0^{\pi} (\cos nx \cdot \sin nx + \cos^{n-1} x \cos nx \cdot \sin x) dx$$

$$= \int_0^{\pi} (\cos^{n-1} x \cdot [\sin nx \cdot \cos x + \cos x \sin x]) dx$$

$$= \int_0^{\pi} \cos^{n-1} x \cdot \sin(n+1)x dx = C.$$

Do đó: $C = 0$.

C. Bài tập tự luyện:

Bài 1: Tính $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \sin^n x} dx$.

Bài 2: Tính $A = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos^2 x}{\cos 2x} dx$.

Bài 3: Tính $A = \int_0^{\pi/2} e^x \cos^2 x dx$.

Bài 4: Tính $I = \int_0^{\pi/2b} e^{ax} \cdot \cos x dx$.

Bài 5: Tính $I = \int \frac{e^x}{e^x - e^{-x}} dx$.

D. Hướng dẫn – Đáp số:

Bài 1: Chứng minh: $I_n = J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\cos^n x + \sin^n x} dx$ (Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x$)

Vì $I_n + J_n = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I_n = J_n = \frac{\pi}{4}$

Bài 2: Xét $B = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos^2 x}{\cos 2x} dx \Rightarrow A = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{4} \ln(2 - \sqrt{3})$.

Chú ý: $\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.

Bài 3: Xét $B = \int_0^{\pi/2} e^x \sin^2 x dx \Rightarrow A+B = \int_0^{\pi/2} e^x dx = e^{\pi/2} - 1$.

$A - B = \int_0^{\pi/2} e^x (\sin x - \cos^2 x) dx = - \int_0^{\pi/2} e^x \cos 2x dx$.

Suy ra: $A = \frac{1}{5} (2e^{\frac{\pi}{2}} - 3)$.

Đặt $u = \cos bx$

$dv = e^{ax} dx \Rightarrow J = -\frac{1}{a} + \frac{b}{a} J$ với $J = \int_0^{\pi/2b} e^{ax} \cdot \sin bxdx$.

$aI - bJ = -1 \quad (1)$

Xét J : Đặt $u = \sin bx$ $dv = e^{ax} \Rightarrow aJ + bI = e^{\frac{\pi a}{2b}} \quad (2)$

Giải hệ (1) (2) $\Rightarrow I = \frac{1}{a^2 + b^2} (b \cdot e^{\frac{\pi a}{2b}} - a)$.

Bài 5: Đáp số: $I = \ln \sqrt{e^2 + 1}$.

V. Bất Đẳng Thức Tích Phân

A. Tóm tắt lý thuyết

PP. Áp dụng Các tính chất của tích phân sau:

Nếu: $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ thì $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

Nếu: $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ thì $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

Nếu $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$ thì: $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

$\forall x \in [a, b]$ ta có: $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$

B. Bài tập áp dụng :

Bài 1: Chứng minh $1 - \frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1.$

Hướng dẫn giải:

Vì: $x \in [0, 1] \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq x \Rightarrow 1 \geq e^{-x^2} \geq e^{-x}.$

Do đó:

$$\int_0^1 e^{-x} dx \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq \int_0^1 dx \Leftrightarrow -e^{-x} \Big|_0^1 \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1, \text{ đpcm.}$$

Bài 2: Chứng minh: $\frac{2}{\sqrt[4]{e}} \leq \int_0^2 e^{x^2-x} dx \leq 2e^2.$

Hướng dẫn giải:

Xét $f(x) = x^2 - x$ trên $[0, 2]$ ta có $\text{Max } f(x) = 2.$

$$\text{Min } f(x) = -\frac{1}{4}$$

Do đó: $\frac{-1}{4} < e^{x^2-x} < e^x$

$$\Rightarrow \int_0^2 e^{-\frac{1}{4}} dx \leq \int_0^2 e^{x^2-x} dx \leq \int_0^2 e^x dx \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt[4]{e}} \leq \int_0^2 e^{x^2-x} dx \leq 2e^2.$$

Bài 3: Chứng minh $\left| \int_0^1 \frac{\cos x}{1+x} dx \right| \leq \int_0^1 \frac{|\cos x|}{1+x} dx \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$

Bài 4: a. Chứng minh: $\int_0^{\pi/2} \sin 2x dx \leq 2 \int_0^{\pi/2} \sin x dx.$

b. Chứng minh: $\frac{\pi}{4} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4+3\cos^2 x} \leq \frac{\pi}{8}.$

Hướng dẫn giải:

a. Ta có: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x.$

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 0 \leq \sin x; \cos x \leq 1 \Rightarrow \sin 2x \leq 2 \sin x.$$

$$\text{Do đó: } \int_0^{\pi/2} \sin 2x dx \leq 2 \int_0^{\pi/2} \sin x dx.$$

$$\text{b. } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow 4 \leq 4 + 3\cos^2 x \leq 7..$$

$$\begin{aligned} \text{c. } & \Leftrightarrow \frac{1}{7} \leq \frac{1}{4+3\cos^2 x} \leq \frac{1}{4} \\ & \Rightarrow \frac{1}{7} \int_0^{\pi/2} dx \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4+3\cos^2 x} \leq \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} dx \\ & \Rightarrow \frac{\pi}{14} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4+3\cos^2 x} \leq \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

Bài 5:

a. Chứng minh: $\int_1^{n+1} \frac{x-1}{x} dx \leq \int_1^{n+1} \frac{2x-1}{x+1} dx.$

b. Chứng minh: $\int_n^{n+1} \frac{x}{x+1} dx < \int_{n+1}^{n+2} \frac{2x-1}{x+1} dx \quad (n \geq 1).$

Hướng dẫn giải:

a. Chứng minh: $\forall x \in [1, 2]$ thì $\frac{x-1}{x} < \frac{2x-1}{x+1}$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 < 2x^2 - x \Leftrightarrow x^2 - x + 1 > 0 \quad \forall x \in [1, 2].$$

$$\text{Do đó: } \frac{x-1}{x} < \frac{2x-1}{x+1} \quad \forall x \in [1, 2] \Rightarrow \int_1^{n+1} \frac{x-1}{x} dx < \int_1^{n+1} \frac{2x-1}{x+1} dx \quad (1)$$

b. Đặt $t = x - 1 \Rightarrow \int_{n+1}^{n+2} \frac{2x-1}{x+1} dx = \int_n^{n+1} \frac{2(t+1)-1}{t+1+1} dt = \int_n^{n+1} \frac{2x+1}{x+2} dx.$

Suy ra $f(x) = \frac{2x+1}{x+2} - \frac{x}{x+1} = \frac{x^2+x+1}{(x+1)(x+2)} > 0 \quad \forall x \in [n, n+1].$

$$\int_n^{n+1} \frac{x-1}{x} dx < \int_{n+1}^{n+2} \frac{2x-1}{x+1} dx.$$

Bài 6: Chứng minh: $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx > \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$

Hướng dẫn giải:

Đặt $t = \pi - x \Rightarrow dt = -dx.$

Ta có: $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx = - \int_{\pi/2}^0 \frac{\sin(\pi-t)}{\pi-t} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t dt}{\pi-t} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\pi-x} dx.$

Ta chứng minh:

$$\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \frac{\sin x}{\pi-x} < \frac{\sin x}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{\pi-x} < \frac{1}{x} (\sin x > 0) \Leftrightarrow x < \pi - x$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{\pi}{2} \text{ đúng.}$$

Do đó $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\pi-x} dx < \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx \Rightarrow \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx < \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx.$

Bài 7: Chứng minh: $54\sqrt{2} \leq \int_7^{11} (\sqrt{x+7} + \sqrt{11-x}) dx \leq 108.$

Hướng dẫn giải:

Xét $f(x) = \sqrt{x+7} + \sqrt{11-x}$ trên $[-7, 11].$

Ta có: $\text{Max } f(x) = 6, \text{Min } f(x) = 3\sqrt{2}.$

Do đó: $3\sqrt{2}(11+7) \leq \int_7^{11} (\sqrt{x+7} + \sqrt{11-x}) dx \leq 6(11+7)$

$$\Leftrightarrow 54\sqrt{2} \leq \int_7^{11} (\sqrt{x+7} + \sqrt{11-x}) dx \leq 108.$$

Bài 8: Chứng minh $\frac{1}{2} < \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} < \frac{\pi}{6} \quad \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}.$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\forall x \in [0, 1/2],$ thì $0 < 1 - x^2 < 1 - x^{2n} \leq 1.$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ suy ra:}$$

$$\frac{1}{2} < \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} < \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{6}$$

Bài 9: Cho f, g là các hàm số liên tục trên $[0,1]$ thỏa $0 \leq f(x), g(x) \leq 1$
 Chứng minh

$$\left[\int_0^1 f(x)g(x)dx \right]^2 \leq \left(\int_0^1 f(x)dx \right) \left(\int_0^1 g(x)dx \right).$$

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$$\begin{cases} 0 \leq f(x) \leq 1 \\ 0 \leq g(x) \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq f(x) \cdot g(x) \leq g(x) \\ 0 \leq f(x) \cdot g(x) \leq f(x) \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } 0 \leq \int_0^1 f(x)g(x)dx \leq \int_0^1 g(x)dx$$

$$\text{Và } 0 \leq \int_0^1 f(x)g(x)dx \leq \int_0^1 f(x)dx$$

$$\Rightarrow \left(\int_0^1 f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left(\int_0^1 f(x)dx \right) \cdot \left(\int_0^1 g(x)dx \right).$$

C. Bài tập tự luyện :

Bài 1: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

$$\text{a. } \int_0^1 x^3 dx \leq \int_0^1 (4x^2 - 3x) dx \quad \text{b. } \int_0^1 e^{-\sin x} dx \leq \int_0^1 e^{-\sin^2 x} dx.$$

$$\text{Bài 2: Chứng minh: } \frac{\sqrt{3}}{4} < \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{1}{2}.$$

$$\text{Bài 3: Chứng minh: } \left| \int_0^{\pi/2} \frac{a \sin x + b \cos x}{x^2 + 1} dx \right| \leq \frac{\pi}{4} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$\text{Bài 4: Chứng minh: } 0 < \int_0^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x} \sin x}{1+x^2} dx \leq \frac{\pi}{12e}.$$

$$\text{Bài 5: Chứng minh: } 2\sqrt{2} < \int_1^e \frac{dx}{\sqrt{\ln x}} < 4.$$

$$\text{Bài 6: Chứng minh: } \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x) dx \leq \frac{1}{2} \ln 2.$$

D. Hướng dẫn đáp án

Bài 1: a. Xét $f(x) = x^3 - (4x^2 - 3x)$.

b. $x \in [0, 1]$ nên $0 \leq \sin x < 1 \Rightarrow \sin^2 x \leq \sin x \Rightarrow -\sin x \leq -\sin^2 x$
 $\Rightarrow e^{-\sin x} \leq e^{-\sin^2 x}$

Bài 2: Xét $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ trên $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}] \Rightarrow f(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$

Xét $h(x) = x \cos x - \sin x \Rightarrow h'(x) = -x \sin x < 0 \forall x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$

$\Rightarrow f(x) < 0 \Rightarrow$ nghịch biến: $f\left(\frac{\pi}{3}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} < \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{1}{2}$.

Bài 3: Ta có: $|a \sin x + b \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ do đó

$$\left| \int_0^1 \frac{a \sin x + b \cos x}{x^2 + 1} dx \right| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Bài 4: $x \in [1, \sqrt{3}] = e^{-x} \leq e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Do đó: $\frac{e^{-x}}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{e(x^2 + 1)} \Rightarrow \int \frac{e^{-x}}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{e} \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{12e}$.

Bài 5: $x \in [3, 7] \Rightarrow e < 3 \leq x < 7 \leq e^2$

$\Rightarrow 1 < \ln e < \ln x < \ln e^2 = 2 \Leftrightarrow 1 < \sqrt{\ln x} < \sqrt{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{\ln x}} < 1 \Rightarrow$ đpcm.

Bài 6: Xét $f(x) = \ln(1 + \tan x) - \tan x$ trên $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

$\Rightarrow \ln(1 + \tan x) < \tan x$, đpcm.

VI. Trắc nghiệm về các phương pháp tính tích phân

Câu 1: Cho $f(x)$ là hàm số lẻ liên tục trên $[-a, a]$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng:

A. $\int_a^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$

B. $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

C. $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_{-a}^0 f(x)dx$

D. $\int_{-a}^a f(x)dx = -2 \int_0^a f(x)dx$.

Câu 2: Cho hàm số f có nguyên hàm trên $\mathbb{R}$. Xét các mệnh đề:

I: $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$

II: $\int_0^{\pi/2} x^3 f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx$

III: $\int_0^a x^3 f(x^2)dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} xf(x)dx$

Các mệnh đề đúng là:

A. Chỉ I

B. Chỉ II

C. Chỉ III

D. I, II và III.

Câu 3: Cho f có nguyên hàm trên $\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng

A. $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(1-x)dx$

B. $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$

C. $\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = \pi \int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

D. $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x)dx$.

Câu 4: Cho $f(x)$ là hàm số lẻ và $\int_{-2}^0 f(x)dx = 2$. Giá trị của $\int_0^2 f(x)dx$ là:

A. 2

B. -2

C. 1

D. -1.

Câu 5: Cho $f(x)$ là hàm số chẵn và $\int_{-1}^0 f(x)dx = 3$. Giá trị của $\int_{-1}^1 f(x)dx$ là:

A. 3

B. 2

C. 6

D. -3.

Câu 6: Cho $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx$ và $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx$.

Mệnh đề nào là đúng

A. $I = J = \frac{\pi}{2}$

B. $I = \frac{\pi}{4}$ và $J = -\frac{\pi}{4}$

C. $I = J = \frac{\pi}{4}$

D. $I = \frac{\pi}{6}$ và $J = \frac{\pi}{3}$.

Câu 7: Giá trị của tích phân $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^5 x}{\cos^7 x} dx$ là:

A. 6

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{5}{7}$

D. $\frac{7}{5}$.

Câu 8: Giá trị của tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$ là:

A. $\ln e(e+1)$

B. $\ln \frac{e+1}{2e}$

C. $\ln \frac{2e}{e+1}$

D. $\ln \frac{1}{e+1}$.

Câu 9: Giá trị của tích phân $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin 2x}$ là:

A. $\frac{\sqrt{3}}{3} - 1$

B. $\sqrt{3} + 1$

C. $4 \ln 3$

D. $\frac{1}{4} \ln 3$.

Câu 10: Giá trị của tích phân $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$ là:

A. $\frac{\pi}{4}$

B. $\frac{\pi}{2}$

C. π

D. $\frac{2\pi}{3}$.

Câu 11: Giá trị của tích phân $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx$ là:

A. $\ln 2$

B. $-\ln 2$

C. $\frac{\pi}{2}$

D. $\frac{\pi}{2} - 1$.

Câu 12: Giá trị của tích phân $\int_0^1 \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$ là:

- A. 1 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$.

Câu 13: Giá trị của tích phân $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$ là:

- A. $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ B. $\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$ C. $2\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ D. $2\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$.

Câu 14: Giá trị của tích phân $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}$ là:

- A. $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ C. $3\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{3}$.

Câu 15: Giá trị của tích phân $\int_{-1}^2 \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^2 dx$ là:

- A. $4 + 12 \ln 2$ B. $\frac{15}{4} + 6 \ln 2$ C. $\frac{39}{4} - 12 \ln 2$ D. $\frac{39}{4} + 6 \ln 2$.

Câu 16: Giá trị của tích phân $\int_2^3 \ln(x^2 - x) dx$ là:

- A. $3 \ln 3 - 2$ B. $2 \ln 3 + \ln 2$
C. $3 \ln 3 + 2 \ln 2$ D. $\ln 3 + 3 \ln 2$.

Câu 17: Giá trị của tích phân $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x}{\sin^2 x} dx$ là:

- A. $\frac{\pi}{4} + \ln 2$ B. $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$
C. $\frac{\pi}{4} - 2 \ln 2$ D. $\frac{\pi}{4} + 2 \ln 2$.

Câu 18: Giá trị của tích phân $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$ là:

- A. π^2 B. $\pi^2 + 2$
C. $\pi^2 - 4$ D. $2\pi^2 - 1$.

Câu 19: Giá trị của tích phân $\int_0^1 x e^{-2x} dx$ là:

A. $\frac{1}{4}\left(1 - \frac{3}{e^2}\right)$ B. $\frac{1}{4}\left(\frac{3}{e^2} - 1\right)$ C. $\frac{1}{4}\left(1 + \frac{3}{e^2}\right)$ D. $\frac{1}{4}e^2 - 1$.

Câu 20: Giá trị của tích phân là: $\int_0^\pi e^x \cos x dx$

A. $-\frac{1}{2}(e^\pi + 1)$ B. $\frac{1}{2}(e^\pi + 1)$ C. $-\frac{1}{2}(e^\pi - 1)$ D. $\frac{1}{2}(e^\pi - 1)$.

Câu 21: Đặt $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$.

Mệnh đề nào dưới đây là đúng:

A. $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n}$ B. $I_n - I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$
C. $I_n - I_{n+2} = \frac{1}{n}$ D. $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.

Câu 22: Đặt $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

Mệnh đề nào dưới đây là đúng:

A. $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$ B. $I_n + (n+1)I_n = \frac{1}{e}$
C. $I_n - nI_{n+1} = \frac{1}{e}$ D. $I_{n+1} - nI_n = e$.

Câu 23: Cho $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$ và $J = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$

Mệnh đề nào dưới đây là đúng :

A. $I = J = \frac{\pi}{6}$ B. $I = J = \frac{\pi}{3}$
C. $I = J = \frac{\pi}{12}$ D. $I = \frac{\pi}{6}, J = -\frac{\pi}{6}$.

Câu 24: Cho $M = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dx$ và $N = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$.

Mệnh đề nào dưới đây là đúng :

I. $M + N = 1$.

II. $M - N = \ln\left(\frac{e^2 + 1}{2e}\right)$.

III. $M = \ln \frac{\sqrt{e^2 + 1}}{2}$.

A. I và II

B. I và III

C. II và III

D. I, II và III.

Câu 25: Cho $I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin x dx$. Giá trị của I_n là :

A. $(-1)^n 2$

B. $(-1)^n$

C. $2(-1)^{2n}$

D. $(-1)^{n+1}$.

VII. Hướng dẫn giải trắc nghiệm về các phương pháp tính tích phân

Câu 1: $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$.

Đặt $t = -x$ thì $\int_{-a}^0 f(x) dx = -\int_0^a f(t) dt$.

Do đó $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$. Chọn câu B.

Câu 2: Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x$. Chứng minh được I đúng.

Đặt $t = \pi - x$. Chứng minh được II đúng.

Đặt $t = x^3$. Chứng minh được III đúng. Chọn câu D.

Câu 3: Đặt $t = 1 - x \Leftrightarrow x = 1 - t \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(1 - x) dx$. Chọn câu A.

Câu 4: $f(x)$ là hàm số lẻ $\Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0$.

Do đó $\int_{-2}^0 f(x)dx = 2 \Rightarrow \int_0^2 f(x)dx = -2$. Chọn câu B.

Câu 5: Đặt $t = -x \Rightarrow \int_{-1}^1 f(x)dx = 2 \int_{-1}^0 f(x)dx = 6$. Chọn câu C.

Câu 6: Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x$. Chứng minh được $I = J$

$$I + J = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}. \text{ Do đó: } I = J = \frac{\pi}{4}. \text{ Chọn câu C.}$$

Câu 7: $I = \int_0^{\pi/4} \tan^5 x \frac{dx}{\cos^2 x} = \int_0^1 t^5 dt = \frac{t^6}{6} \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$. Chọn câu B.

Câu 8: $I = \int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} = \int_0^1 \frac{e^x dx}{e^x(e^x + 1)}$

$$\text{Đặt } t = e^x + 1 \Rightarrow I = \int_2^{e+1} \frac{dt}{t(t-1)} = \int_2^{e+1} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt$$

$$= \ln \left| \frac{t-1}{t} \right| \Big|_2^{e+1} = \ln \frac{2e}{e+1}. \text{ Chọn câu C.}$$

Câu 9: $I = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin 2x} = \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos^2 t}{\tan x} = \frac{1}{2} \ln |\tan x| \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{1}{4} \ln 3$. Chọn câu D.

Câu 10: Đặt $x = \tan t \Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} dt = \frac{\pi}{2}$. Chọn câu B.

Câu 11: Đặt $u = 1 + \cos^2 x \Rightarrow du = -\sin 2x dx$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx = \int_2^1 -\frac{du}{u} = -\ln u \Big|_2^1 = \ln 2. \text{ Chọn câu A.}$$

Câu 12: $I = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\pi/3} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \cdot \sin x dx$

$$= \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx - \int_0^{\pi/3} \sin x dx = \frac{1}{\cos x} + \cos x \Big|_0^{\pi/3} = \frac{1}{2}. \text{ Chọn câu B.}$$

Câu 13: Đặt $x = \sin t$

$$I = \int_2^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx$$

$$= -\cot x - x \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}. \text{ Chọn câu A.}$$

Câu 14: Đặt $x = \tan t$

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos x dx = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}. \text{ Chọn câu B.}$$

Câu 15: $\int_{-1}^2 \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^2 dx = \int_{-1}^2 \left(1 - \frac{6}{x+2} + \frac{9}{(x+2)^2} \right) dx$

$$= \left(x - 6 \ln|x+2| - \frac{9}{x+2} \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{39}{4} - 12 \ln 2. \text{ Chọn câu C.}$$

Câu 16: Đặt $u = \ln(x^2 - x) \Rightarrow du = \frac{2x-1}{x^2-x}$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$I = \left[x \ln(x^2 - x) \right]_2^3 - \int_2^3 \frac{2x-1}{x-1} dx = \left[x \ln(x^2 - x) - 2x - \ln|x-1| \right]_2^3$$

$$I = 3 \ln 3 - 2. \text{ Chọn câu A.}$$

Câu 17: Đặt $u = x \Rightarrow du = dx$

$$dv = \frac{dx}{\sin^2 x} \Rightarrow v = -\cot x$$

$$I = -x \cot x \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x} dx = -x \cot x + \ln|\sin x| \Big|_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$I = \frac{\pi}{4} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2. \text{ Chọn câu B.}$$

Câu 18: Đặt $u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$

$$dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x$$

$$I = -x^2 \cos \Big|_0^\pi + 2 \int_0^\pi x \cos dx. \text{ Đặt } u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x$$

$$I = \left[-x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) \right] \Big|_0^\pi = \pi^2 - 4. \text{ Chọn câu C.}$$

Câu 19: Đặt $u = x \Rightarrow du = dx$

$$dv = e^{-2x} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2} e^{-2x}$$

$$I = -\frac{x}{2} e^{-2x} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x} dx = -\frac{x}{2} e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{3}{e^2} \right). \text{ Chọn câu A.}$$

Câu 20: Đặt $u = e^x$

$$dv = \cos x dx \Rightarrow I = e^x \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi e^x \sin x dx$$

$$\text{Đặt } u = e^x$$

$$dv = \sin x dx \Rightarrow 2I = e^x \sin x + e^x \cos x \Big|_0^\pi - I$$

$$I = -\frac{1}{2} (e^\pi + 1). \text{ Chọn câu A.}$$

Câu 21: $I_{n+2} = \int_0^{\pi/4} t g^{n+2} x + t g^n x - t g^n x dx$

$$= \int_0^{\pi/4} t g^n (t g^2 x + 1) dx - I_n$$

$$= \frac{1}{n+1} t g^{n+1} x \Big|_0^1 - I_n = \frac{1}{n+1} - I_n.$$

$$\text{Hay: } I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1} \text{ Chọn câu A.}$$

Câu 22: Đặt $u = x^{n+1} \Rightarrow du = (n+1)x^n dx$

$$dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = e^{-x}$$

$$I_{n+1} = -x^{n+1} e^{-x} \Big|_0^1 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{-x} du = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n. \text{ Chọn câu A.}$$

Câu 23:

$$I - J = \int_{-\pi/6}^{\pi/3} dx = \frac{\pi}{6}, I + J = \int_{-\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx = \ln |\sin x + \cos x| \Big|_{-\pi/6}^{\pi/3} = 0.$$

Do đó: $I = J = \frac{\pi}{12}$. Chọn câu C.

Câu 24: $M + N = \int_0^1 dx = 1, M - N = \int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \ln |e^x + e^{-x}| \Big|_0^1 = \ln \frac{e^2 + 1}{e}$

Giải hệ $M = \frac{1}{2} \left(1 + \ln \left(\frac{e^2 + 1}{2e} \right) \right) = \ln \frac{\sqrt{e^2 + 1}}{2}$. Chọn câu D.

Câu 25: $I_n = -\cos x \Big|_{n\pi}^{(n+1)\pi} = \cos n\pi - \cos(n+1)\pi = 2(-1)^n$. Chọn câu A.

§4 Vấn đề 4. Ứng dụng của tích phân để tính diện tích

I. Ứng dụng tích phân để tính diện tích

A. Tóm tắt lý thuyết

1. Diện Tích Hình Thang Cong:

Cho $f(x)$ liên tục $[a, b]$ diện tích hình thang cong xác định bởi :

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = a \\ x = b \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{được tính bởi công thức } S = \int_a^b |f(x)| dx$$

2. Diện tích hình phẳng:

Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên $[a, b]$ Diện tích hình phẳng xác định bởi: $y = f(x); y = g(x), x = a$ và $x = b$

được tính bởi công thức :

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Chú ý: Có thể dùng phương pháp tích phân các hàm số có chứa giá trị tuyệt đối (xét biểu thức trong giá trị tuyệt đối) hoặc dùng đồ thị hàm số trên $[a, b]$ để tính diện tích từng phần thích hợp.

B. Bài tập áp dụng :

Bài 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi

$$y = \frac{1}{x(x^3 + 1)} ; y = 0; x = 1 \text{ và } x = 2.$$

Hướng dẫn giải:

Vì $x \in [1, 2] \Rightarrow y = \frac{1}{x(x^3 + 1)} \geq 0$ nên diện tích hình phẳng là:

$$S = \int_1^2 \frac{dx}{x(1 + x^3)} = \int_1^2 \frac{x^2 dx}{x^3(x^3 + 1)}$$

$$S = \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{d(x^3)}{x^3(x^3 + 1)} = \frac{1}{3} \left[\int_1^2 \frac{d(x^3)}{x^3} - \int_1^2 \frac{d(x^3)}{1 + x^3} \right]$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x^3}{1 + x^3} \right|_1^2 = \frac{1}{3} \ln \frac{16}{9} \text{ (đv dt).}$$

Bài 2: Tính diện tích miền (D) giới hạn bởi:

$$y = \sqrt{x}, y = 2 - x \text{ và } y = 0$$

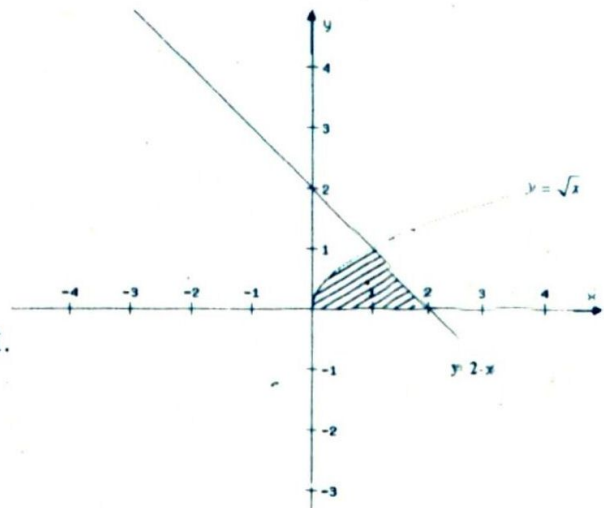
Hướng dẫn giải:

Hoành độ giao điểm

$$\sqrt{x} = 2 - x \Leftrightarrow x = 1$$

$$y = 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

$$S = \int_0^1 \sqrt{x} dx + \int_1^2 (2 - x) dx = \frac{7}{6} \text{ đvdt.}$$



Bài 3: Tính diện tích giới hạn bởi:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{\sin^2 x} & y = \frac{1}{\cos^2 x} \\ x = \frac{\pi}{6} & x = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

Đề ý: $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ thì $\cos^2 x \geq \sin^2 x$, $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ thì $\cos^2 x \leq \sin^2 x$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } S &= \int_{\pi/6}^{\pi/4} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/3} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx \\ &= -\cot x - \tan x \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} + \tan x + \cot x \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{8\sqrt{3}}{3} - 4. \end{aligned}$$

Bài 4: Tính diện tích giới hạn bởi:

$$y = |x^2 - 1| \text{ và } y = |x| + 5.$$

Hướng dẫn giải:

$$y = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ 1 - x^2 & \text{khi } -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$y = |x| + 5 = \begin{cases} x + 5 & \text{khi } x \geq 0 \\ -x + 5 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

Giao điểm $x = \pm 3$.

Do tính chất đối xứng của đồ thị (hàm số chẵn) qua Oy, ta có :

$$\begin{aligned} S &= 2 \left[\int_0^1 [x + 5 - (1 - x^2)] dx + \int_1^3 [x + 5 - (x^2 - 1)] dx \right] \\ &= 2 \left[\int_0^1 (x^2 + x + 4) dx + \int_1^3 (-x^2 + x + 6) dx \right] = \frac{73}{6} \text{ (đvdt)}. \end{aligned}$$

Bài 5: Tính diện tích giới hạn bởi: $\begin{cases} y = \frac{4x}{x^4 + 1}, y = 0 \\ x = -1, x = 1 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải:

$$S = \int_{-1}^1 \left| \frac{4x}{x^4 + 1} \right| dx = \int_{-1}^0 \frac{-4x}{x^4 + 1} dx + \int_0^1 \frac{4x}{x^4 + 1} dx$$

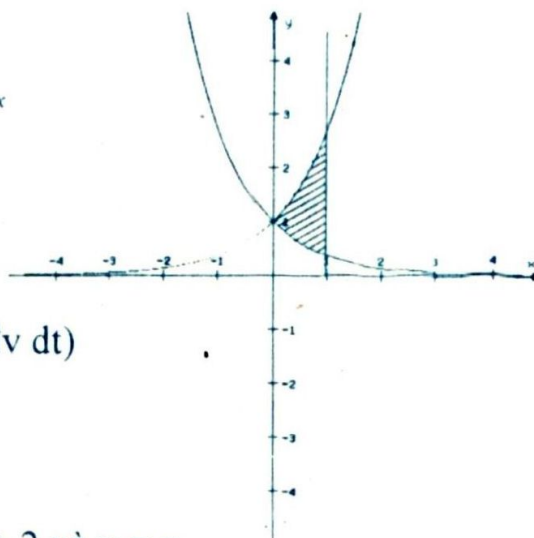
$$S = 2 \int_0^1 \frac{4x}{x^4 + 1} dx = 4 \int_0^1 \frac{d(x^2)}{(x^2)^2 + 1} = 4 \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1}$$

$$\text{Đặt } u = \tan t \Rightarrow S = 4 \int_0^{\pi/4} dt = \pi \quad (\text{đv dt})$$

Bài 6: Tính diện tích giới hạn bởi $\begin{cases} y = e^x \\ y = e^{-x} \\ x = 1 \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

$$S = \int (e^x - e^{-x}) dx \Leftrightarrow S = e + \frac{1}{e} - 2 \quad (\text{đv dt})$$



Bài 7: Tính diện tích giới hạn bởi: $y^2 = x + 2$ và $y = x$

Hướng dẫn giải:

Giao điểm

$$y^2 - y - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = -1 \vee y = 2$$

$$y^2 = x + 2 \Leftrightarrow x = y^2 - 2.$$

$$S = \int_{-1}^2 [y - (y^2 - 2)] dy = \frac{9}{2} \text{ đvdt.}$$

Bài 8: Tính giới hạn bởi: $y = 1/2 (x^2 - 4x + 3)$ và 2 tiếp tuyến xuất phát từ $M (3; -2)$

Hướng dẫn giải:

Các tiếp tuyến xuất phát từ M là:

$$y = -x + 1 \text{ và } y = 3x - 11$$

Diện tích tạo thành:

$$S = \int \left(\frac{x^2 - 4x + 3}{2} + x - 1 \right) dx + \int \left(\frac{x^2 - 4x + 3}{2} - 3x + 11 \right) dx.$$

$$S = 8 \text{ đvdt.}$$

Bài 9: Tính diện tích giới hạn bởi: $y = (x+1)^5$; $y = e^x$ và $x = 1$.

Hướng dẫn giải:

Giao điểm của 2 đường cong là $A (0,1)$.

Trên $[0,1]$ thì $(x+1)^5 > e^x$.

$$\text{Do đó: } S = \int_0^1 \left[(x+1)^5 - e^x \right] dx = \left[\frac{(x+1)^6}{6} - e^x \right] \bigg|_0^1 = \frac{23}{2} - e.$$

Bài 10: Gọi (D) là miền giới hạn bởi: $y = -3x + 10$,
 $y = 1$, $y = x^2$ ($x > 0$) và (D) ở ngoài (P): $y = x^2$.

Hướng dẫn giải:

Dựa vào đồ thị ta có :

$$S = \int_1^2 (x^2 - 1) dx + \int_2^9 [(-3x + 10) - 1] dx = \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \bigg|_1^2 + \left(-\frac{3x^2}{2} + 9x \right) \bigg|_2^9$$

$$S = \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{27}{2} + 27 + 6 - 18 = \frac{17}{6} \text{ đv dt.}$$

Bài 11: Tính diện tích giới hạn bởi: $\begin{cases} y = x\sqrt{1-x^2}, y = 0 \\ x = 0, x = 1 \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

Hàm $y = x\sqrt{1-x^2}$ liên tục không âm trên $[0, 1]$.

$$\text{Do đó } S = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx$$

$$\text{Đặt } u = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow S = \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3} \text{ (đvdt).}$$

Bài 12: Cho $a > 0$. Tính diện tích giới hạn bởi: $y = \frac{x^2 + 2ax + 3a^2}{1 + a^4}$

$$\text{và } y = \frac{a^2 - ax}{1 + a^4}.$$

Hướng dẫn giải:

Hoành độ giao điểm $x = -a$, $x = -2a$.

$$S = \int_{-2a}^{-a} \left| \frac{x^2 + 2ax + 3a^2}{1 + a^4} - \frac{a^2 - ax}{1 + a^4} \right| dx = \frac{1}{1 + a^4} \int_{-2a}^{-a} |x^2 + 3ax + 2a^2| dx$$

$$S = -\frac{1}{1 + a^4} \int_{-2a}^{-a} (x^2 + 3ax + 2a^2) dx = -\frac{a^3}{6(1 + a^4)} \text{ (đvdt).}$$

Bài 13: Cho hàm số: $y = x^2 + 1$ (P) và đường thẳng $y = mx + 2$.

Chứng minh khi m thay đổi thì (d) luôn luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt.
 Hãy xác định m để diện tích hình thang giới hạn bởi (d) và (P) là nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải:

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 + 1 = mx + 2$

$\Leftrightarrow x^2 - mx - 1 = 0$. Phương trình luôn luôn có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_A + x_B = m; x_A \cdot x_B = -1.$$

$$S = \int_{x_1}^{x_2} (mx + 2 - x^2 - 1) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{mx^2}{2} + x \right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= (x_2 - x_1) \left[-\frac{1}{3}(x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2) + \frac{m}{2}(x_1 + x_2) + 1 \right]$$

$$= (x_2 - x_1) \left[-\frac{1}{3}[(x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2] + \frac{m}{2}(x_1 + x_2) + 1 \right]$$

$$(x_2 - x_1)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = m^2 + 4.$$

$$\text{Do đó: } S = \sqrt{m^2 + 4} \left[\frac{1}{6} m^2 + \frac{2}{3} \right] \geq \frac{4}{3}$$

$$S_{\min} = \frac{4}{3} (\text{đvdt}) \Rightarrow m = 0.$$

Bài 14: Parabol $y^2 = 2x$ chia đường tròn: $x^2 + y^2 = 8$ thành hai phần, tính diện tích từng phần đó.

Hướng dẫn giải:

(P) cắt (C) tại A(2,2); B(2,-2)

(C) cắt Ox: tại C(-2√2,0); D(2√2,0).

$$S_1 = 2 \left[\int_0^2 \sqrt{2x} dx + \int_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8-x^2} dx \right]$$

$$+ \int_0^2 \sqrt{2x} dx = \frac{8}{3} \text{ đvdt}; \int_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8-x^2} dx = 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \pi - 2$$

(Đặt $x = 2\sqrt{2} \sin t$).

$$S_1 = 2 \left[\frac{8}{3} + \pi - 2 \right] = \left(2\pi + \frac{4}{3} \right) \text{ đvdt}.$$

$$S_2 = S - S_1 = \left(6\pi - \frac{4}{3}\right) \text{ đvdt.}$$

C. Bài tập tự luyện:

Bài 1: Tính diện tích giới hạn bởi:

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = e \\ y = \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x}; y = 0 \end{cases}$$

Bài 2: Tính diện tích giới hạn bởi: $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 2 \\ y = x^2 + 4x + 5 \\ y = 1 \end{cases}$

Bài 3: Tính diện tích giới hạn bởi: $y = |x^2 - 4x + 3|$ và $y = 3$

Bài 4: Tính diện tích giới hạn bởi: $x = 1$; $x = e$; $y = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$.

Bài 5: Tính diện tích giới hạn bởi trục Ox và các đường: $x - y^3 + 1 = 0$ và $x + y - 1 = 0$.

Bài 6: Tính diện tích giới hạn bởi: $y = \sin|x|$ và $y = |x| - \pi$.

Bài 7: Tính diện tích giới hạn bởi: $y = x^2 - 4x + 5$ và hai tiếp tuyến của (P) tại A(1,2) và B(4,5)

Bài 8: Tính diện tích giới hạn bởi:

$$y^2 = 2x \text{ (P)} \text{ và } 27y^2 = 8(x - 1)^3 \text{ (C).}$$

D. Hướng Dẫn – Đáp Số

Bài 1: Đáp số $S = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$.

Bài 2: $S = \int_2^{1/2} (x^2 + 4x + 5) dx + \int_{1/2}^1 (x^2 - 2x + 2) dx = \frac{9}{4} \text{ đvdt.}$

Bài 3: $S = \int_1^3 [3 - (x^2 - 4x + 3)] dx + \int_3^4 [3 - (-x^2 + 4x - 3)] dx + \int_4^9 [3 - (x^2 - 4x + 3)] dx$
 $S = 8 \text{ đvdt.}$

Bài 4: $S = \int \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} dx$, đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \end{cases}$

$$S = 2 - \sqrt{e} \text{ (đvdt).}$$

Bài 5:

$$S = \int_1^0 \sqrt[3]{x+1} dx + \int_0^1 (-x+1) \text{ (đvdt).}$$

$$S = \frac{5}{4}.$$

Bài 6: Đồ thị 2 hàm số cắt nhau tại $x = \pm \pi$.

Và $y = \sin |x| \geq |x| - \pi$, do đó:

$$S = 2 \int_0^\pi (\sin x - (x - \pi)) dx = 4 + \pi^2 \text{ (đvdt).}$$

Bài 7: Phương trình các tiếp tuyến :

Tại A: $y = -2x + 4$; tại B: $y = 4x - 11$.

Giao của 2 tiếp tuyến $C(5/2, -1)$.

$$S = \int_{-1}^{5/2} [x^2 - 4x + 5 - (-2x + 4)] dx + \int_{5/2}^4 [(x^2 - 4x + 5) - (4x - 11)] dx$$

$$S = \frac{9}{4} \text{ (đvdt).}$$

Bài 8: $S = 2 \left[\int_0^1 \sqrt{2x} dx + \int_1^4 \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} (x-1)^{3/2} dx \right]$

$$S = \frac{88\sqrt{2}}{15} \text{ đvdt.}$$

II. Ứng dụng của tích phân để tính thể tích

A. Tóm tắt lý thuyết:

* Thể tích vật thể tròn xoay do hình thang cong: $\begin{cases} y = f(x); y = 0 \\ x = a; x = b \end{cases}$
quay quanh Ox:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

* Thể tích vật thể tròn xoay do hình 1 hằng:

$$\begin{cases} y = f(x); y = g(x) \\ x = a; x = b \\ f(x) \geq g(x) \end{cases} \quad \text{quay quanh Ox:}$$

$$V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx$$

B. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Cho (H) là miền kín xác định bởi $y = x \sqrt{\ln(1+x^3)}$ trục Ox và đường thẳng $x = 1$. Tính thể tích vật thể tạo thành khi (H) quay quanh Ox.

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 x^2 \ln(1+x^3) dx = \frac{\pi}{3} \int_0^1 \ln(1+x^3) d(1+x^3) \\ &= \frac{\pi}{3} \int_1^2 \ln x dx = \frac{\pi}{3} [x \ln x - x]_1^2 = \frac{\pi}{3} [2 \ln 2 - 1]. \end{aligned}$$

Bài 2: Cho miền (D) xác định bởi: $\begin{cases} y = \ln x \\ y = 0 \\ x = e \end{cases}$

Tính thể tích vật thể tạo thành khi cho (D) quay quanh Ox.

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^e \ln^2 x dx = \pi [x \ln^2 x]_1^e - 2\pi \int_1^e \ln x dx. \\ V &= \pi \left[x \ln^2 x - 2(x \ln x - x) \right]_1^e = (e-2)\pi. \end{aligned}$$

Bài 3: Cho miền (D) xác định bởi $\begin{cases} x^2 + y - 5 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$

Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi (D) quay quanh Ox.

Hướng dẫn giải:

Tọa độ giao điểm của (P): $y = -x^2 + 5$ và d: $y = -x + 3$ là A(-1,4) B(2,1)

$$x \in [-1, 2] \Rightarrow f(x) = -x^2 + 5 \geq g(x) = -x + 3 \geq 0.$$

Do đó:

$$V = \pi \int_{-1}^2 \left[(-x^2 + 5)^2 - (-x + 3)^2 \right] dx.$$

$$= \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{11}{3}x^3 + 3x^2 + 16 \right]_{-1}^2 = \frac{153}{5} \pi.$$

Bài 4: Gọi (D) là miền xác định bởi: $\begin{cases} y = -x^2 + 2x \\ y = 0 \end{cases}$

Tính thể tích vật thể được tạo thành khi

a. (D) quay quanh Ox.

b. (D) quay quanh Oy.

Hướng dẫn giải:

a. $V_1 = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \left(\frac{4}{3}x^3 - x^4 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \frac{16\pi}{5}.$

b. $y = 2x - x^2 \Rightarrow x = 1 - \sqrt{1 - y}$
 $x = 1 + \sqrt{1 - y}$

$$V = \pi \int_0^1 (1 + \sqrt{1 - y})^2 dy - \pi \int_0^1 (1 - \sqrt{1 - y})^2 dy = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1 - y} dy = \frac{8}{3}\pi.$$

Bài 5: Tính thể tích vật tròn xoay tạo thành khi cho hình tròn $x^2 + (y - b)^2 \leq a^2$ với $0 < a \leq b$ quay quanh Ox.

Hướng dẫn giải:

Đường tròn (C) có tâm I(0, b) bán kính $R = a \leq b$ nên (C) không cắt Ox.

Ta có: (C) $\Leftrightarrow (y - b)^2 = a^2 - x^2 \Leftrightarrow y = b \pm \sqrt{a^2 - x^2}.$

Xem đường tròn (C) gồm 2 nửa đường tròn: $f(x) = b + \sqrt{a^2 - x^2},$

và $g(x) = b - \sqrt{a^2 - x^2}$ khi (C) quay quanh Ox thì thể tích tạo thành là:

$$V = \pi \int_{-a}^a [f^2(x) - g^2(x)] dx$$

$$V = 4\pi b \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 8\pi b \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 2\pi^2 a^2 b^2.$$

Bài 6: Tính thể tích vật tròn xoay tạo thành khi cho hình tròn tâm I(2, 0) bán kính $R = 1$ quay quanh Oy.

Hướng dẫn giải:

Phương trình đường tròn: $(x-2)^2 + y^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + \sqrt{1-y^2} \\ x_2 = 2 - \sqrt{1-y^2} \end{cases}$

Do đó thể tích tạo thành khi cho đường tròn quay quanh Oy là:

$$V = 2\pi \int_0^1 (x_1^2 - x_2^2) dy = 16\pi \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy = 4\pi^2.$$

Bài 7: Cho hàm số $y = \frac{2x}{x-1}$ (H), xét A(2,4) và (d) là tiếp tuyến tại A với (H).

Gọi (D) là miền xác định bởi (H), (d), tiệm cận ngang và đường thẳng $x = 4$.

Tính thể tích khi (D) quay quanh Ox.

Hướng dẫn giải:

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(2) = -2.$$

Tiếp tuyến tại A: $y = -2x + 8$ (d).

Gọi V_1 là thể tích tạo thành khi hình: ABPM quay quanh Ox.

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_2^4 \left[\left(\frac{2x}{x-1} \right)^2 - 2^2 \right] dx = \pi \int_2^4 \left(\frac{4}{(x-1)^2} + \frac{8}{x-1} \right) dx \\ &= 4\pi \left(-\frac{1}{x-1} + 2 \ln(x-1) \right) \Big|_2^4 = 8\pi(1 + \ln 3). \end{aligned}$$

Gọi V_2 là thể tích tạo thành khi tam giác ABN.

III. Trắc nghiệm về ứng dụng của tích phân (diện tích – thể tích)

Câu 1: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^3$ và $y = x$ được tính bởi công thức nào dưới đây:

A. $\left| \int_{-1}^1 (x^3 - x) dx \right|$ B. $\int_{-1}^1 (x^3 - x) dx$ C. $\int_{-1}^1 (x - x^3) dx$ D. $2 \int_0^1 (x - x^3) dx$.

Câu 2: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $y^2 = x$ và $x^2 = y$ là:

A. $\frac{1}{3}$ B. 3 C. 2 D. $\frac{1}{2}$.

Câu 3: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $y = x^2$ và $y = |x|$ là:

- A. 1 B. 2 C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{6}$.

Câu 4: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi elip: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ là:

- A. 3π B. 2π C. 6π D. 4π .

Câu 5: Diện tích hình phẳng xác định bởi: $\begin{cases} y = 2^x \\ y = 3 - x \\ x = 0 \end{cases}$ là:

- A. $\frac{5}{2} - \frac{1}{\ln 2}$ B. $\frac{5}{2} + \frac{1}{\ln 2}$ C. $5 + \ln \frac{1}{2}$ D. $5 + \ln 2$.

Câu 6: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x^2 - 4x$ và $x + y = 0$ là:

- A. 2 B. $\frac{9}{2}$ C. $\frac{2}{9}$ D. $\frac{1}{2}$.

Câu 7: Diện tích giới hạn bởi elip: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và đường tròn: $x^2 + y^2 = 9$

được tính bởi công thức nào dưới đây.

- A. $\frac{1}{3} \int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2} dx$ B. $\frac{4}{3} \int_0^3 \sqrt{9 - x^2} dx$
C. $\frac{2}{3} \int_0^3 \sqrt{9 - x^2} dx$ D. $4 \int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2} dx$.

Câu 8: Diện tích giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{8}$ và trục Ox là:

- A. $\frac{32}{9}$ B. $\frac{12}{11}$ C. $\frac{9}{13}$ D. $\frac{9}{32}$.

Câu 9: Diện tích giới hạn bởi: $\begin{cases} y = x + \sin^2 x \\ y = x \\ 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ có giá trị là:

- A. $\frac{1}{2}$ B. π C. $\frac{\pi}{2}$ D. 2π .

Câu 10: Cho hình phẳng xác định bởi:
$$\begin{cases} y = \sqrt{x}e^x \\ y = 0 \\ x = 0, x = 1 \end{cases}$$

quay quanh Ox. Thể tích vật thể tạo thành có giá trị là:

A. $\frac{\pi}{(e^2 + 1)}$ B. $4\pi(e^2 + 1)$ C. $\frac{\pi}{4}e^2$ D. $\frac{\pi}{4}(e^2 + 1)$.

Câu 11: Cho hình phẳng xác định bởi:

$$y = \begin{cases} y = \sin x + \cos x \\ y = 0 \\ x = 0, x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$
 quay quanh Ox. Thể tích tạo thành là:

A. $\frac{\pi(\pi + 2)}{2}$ B. $2\pi(\pi + 2)$ C. $\pi(\pi - 1)$ D. $\frac{\pi^2}{2}$.

Câu 12: Cho hình phẳng xác định bởi:

$$\begin{cases} (x - 1)^2 \\ y = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$
 quay quanh Oy. Thể tích vật thể tạo thành có giá trị là:

A. $\frac{5}{6}\pi$ B. $\frac{1}{6}\pi$ C. $\frac{2}{3}\pi$ D. $\frac{7}{6}\pi$.

Câu 13: Cho hình phẳng xác định bởi:
$$\begin{cases} y = \frac{4}{x-3} \\ y = 0 \\ x = 0, x = 2 \end{cases}$$
 quay quanh Ox, thể tích

vật thể tạo thành là:

A. $\frac{32}{3}\pi$ B. $\frac{15}{2}\pi$ C. $\frac{16}{3}\pi$ D. $\frac{33}{2}\pi$.

Câu 14: Thể tích vật thể tròn xoay do đường tròn: $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ quay quanh Ox có giá trị là:

A. $11\pi^2$ B. $9\pi^2$ C. $4\pi^2$ D. π^2 .

Câu 15: Cho hình phẳng tạo bởi: $y^2 = x$ và $x^2 = y$ quay quanh Ox. Thể tích vật thể tạo thành là:

- A. $\frac{\pi}{10}$ B. $\frac{3\pi}{10}$ C. $\frac{5\pi}{10}$ D. $\frac{7\pi}{10}$.

Câu 16: Cho hàm số: $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ (c). Gọi (H) là hình phẳng xác định bởi (c), trục Ox và $x = 0, x = 1$ khi H quay quanh Ox, giá trị thể tích vật thể tạo thành là:

- A. $\pi \left(\frac{17}{6} - 2 \ln 2 \right)$ B. $\pi \left(\frac{15}{6} + 2 \ln 2 \right)$
C. $\pi \left(\frac{3}{2} + \ln 2 \right)$ D. $\frac{17}{6} + \ln 2$.

IV. Hướng dẫn giải trắc nghiệm về diện tích – thể tích

Câu 1: Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \pm 1$.

$$S = \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 (x - x^3) dx = 2 \int_0^1 (x - x^3) dx. \text{ Chọn câu D.}$$

Câu 2: Giao điểm $\begin{cases} y^2 = x \\ x^2 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ x = y = 1 \end{cases}; x \in [0, 1], \sqrt{x} > x^2. \text{ Do đó}$

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left(\frac{2}{3} x\sqrt{x} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \text{ Chọn câu A.}$$

Câu 3: Dựa vào tính chất đối xứng thì diện tích S là:

$$S = 2 \int_0^1 (x - x^2) dx = 2 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}. \text{ Chọn câu C.}$$

Câu 4: $S = 4 \int_0^3 \frac{2}{3} \sqrt{9 - x^2} dx.$

Đặt $x = 3 \sin t \Rightarrow S = 6\pi$. Chọn câu C.

Câu 5: Giao điểm: $\begin{cases} y = 2^x \\ y = 3 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, y = 1 \\ x = 1, y = 2 \end{cases}$ vào đồ thị ta có:

$$S = \int_0^1 (3 - x - 2^x) dx \Rightarrow S = \frac{5}{2} - \frac{1}{\ln 2}. \text{ Chọn câu A.}$$

Câu 6: Dựa vào tính chất đối xứng của elip và đường tròn thì phải có:

$$S = 4 \int_0^3 \left(\sqrt{9 - x^2} - \frac{2}{3} \sqrt{9 - x^2} \right) dx = \frac{4}{3} \int_0^3 \sqrt{9 - x^2} dx. \text{ Chọn câu B.}$$

Câu 7: Giao điểm với Ox: $\frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}, x = 1$

Trên $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, đồ thị hàm số trên Ox nên:

$$S = \int_{-1/2}^1 \left(\frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3} \right) dx = \frac{9}{32} \text{ đvdt. Chọn câu D.}$$

Câu 8: $S = \int_0^\pi (x + \sin^2 x - x) dx = \frac{\pi}{2}. \text{ Chọn câu C.}$

Câu 9: $V = \pi \int_0^1 x \cdot e^{2x} dx$. Đặt $u = x, dv = e^{2x} dx$

$$V = \pi \left[\frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} (e^2 + 1). \text{ Chọn câu D.}$$

Câu 10: $V = \pi \int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x)^2 dx = \pi \int_0^{\pi/2} (1 + \sin 2x) dx$

$$= \pi \left[x - \frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi(\pi + 2)}{2}. \text{ Chọn câu C.}$$

Câu 11: $y = (x - 1)^2 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{y}; x = 2 \Rightarrow y = 1$

$$V = \pi \int_0^1 \left[2^2 - (1 + \sqrt{y})^2 \right] dy = \pi \left[3y - \frac{y^2}{2} - \frac{4}{3} y \sqrt{y} \right]_0^1 = \frac{7}{6} \pi. \text{ Chọn câu D.}$$

Câu 12: $V = \pi \int_0^2 \left(\frac{4}{x-3} \right)^2 dx = 16\pi \left(-\frac{1}{x-3} \right)_0^2 = \frac{32}{3}\pi$. Chọn câu A.

Câu 13: $x^2 + (y-2)^2 = 1 \Leftrightarrow y = 2 \pm \sqrt{1-x^2}$.

$$V = \pi \int_{-1}^1 \left[\left(2 + \sqrt{1-x^2} \right)^2 - \left(2 - \sqrt{1-x^2} \right)^2 \right] dx = 8\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

$$= 16\pi \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = 16\pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 dx = 4\pi^2. \text{ Chọn câu C.}$$

Câu 14: $V = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{3\pi}{10}$. Chọn câu B.

Câu 15: $V = \pi \int_0^1 \left(x + \frac{1}{x+1} \right)^2 dx = \pi \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2x}{x+1} \right) dx$

$$= \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x+1} + 2x - 2 \ln|x+1| \right]_0^1 = \pi \left(\frac{17}{6} - 2 \ln 2 \right). \text{ Chọn câu A}$$

§5 Vấn đề 5. Trắc nghiệm tổng hợp về tích phân

Câu 1: Cho $M = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{1 + \cos x} dx$. Xét các mệnh đề :

I: $M = \int_0^{\pi/2} (1 - \cos x) d(1 - \cos x)$

II: $M = \int_0^1 u du$ với $u = 1 - \cos x$

III: $M = \frac{1}{2}$.

Mệnh đề nào đúng.

A. Chỉ I

B. Chỉ II

C. I và II

D. I, II và III.

Câu 2: Giá trị của $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sin x + \cos x}$ là:

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $-\frac{\pi}{2}$ D. $-\frac{\pi}{4}$.

Câu 3: Giá trị của $\int_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x \ln x}$ là:

- A. $\ln \frac{2}{3}$ B. $2 \ln 3$ C. $\ln \frac{3}{2}$ D. $e^2 - e^3$.

Câu 4: Cho $I(a) = \int_0^a (x - x^2) dx$ ($a > 0$).

Giá trị lớn nhất của $I(a)$ là:

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{1}{6}$.

Câu 5: Giá trị của: $\int_0^{2008\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$ là:

- A. $20008\sqrt{2}$ B. $1004\sqrt{2}$ C. $4016\sqrt{2}$ D. 4016 .

Câu 6: Giá trị của $\int_0^{\pi} x \sin x dx$ là :

- A. π B. $\frac{\pi}{2}$ C. 2π D. 0 .

Câu 7: Giá trị của $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos x}{1 + 2^x} dx$ là:

- A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. 1 D. $\frac{1}{2}$.

Câu 8: Giá trị của $\int_2^3 \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} dx$ là :

- A. $1 + \ln \frac{3}{2}$ B. $1 - \ln \frac{3}{2}$ C. $1 + 2 \ln 3$ D. $3 - 2 \ln 2$.

Câu 9: Giá trị của $\int_0^1 \frac{x}{e^x} dx$ là:

- A. $1 + \frac{2}{e}$ B. $1 - \frac{2}{e}$ C. $2 + \frac{1}{e}$ D. $2 - \frac{2}{e}$.

Câu 10: Giá trị $\int_0^1 (x-1)e^{2x} dx$ là:

- A. $e^2 - \frac{1}{4}$ B. $1 + \frac{e^2}{4}$ C. $\frac{1}{4} - e^2$ D. $1 - \frac{e^2}{4}$.

Câu 11: Giá trị của $\int_0^1 \frac{2x}{(x+1)^3} dx$ là:

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. $\frac{1}{3}$.

Câu 12: Giá trị của $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} dx$ là:

- A. $\frac{\pi}{2} + 1$ B. $\frac{\pi + 1}{2}$ C. $\frac{\pi}{2} - 1$ D. $\frac{\pi - 1}{2}$.

Câu 13: Cho hình phẳng xác định bởi: $\begin{cases} y = \sqrt{e^x} \\ y = 0 \\ x = 0, x = 1 \end{cases}$ quay quanh Ox. Thể tích

tạo thành là:

- A. $\pi(e+1)$ B. $\pi(2+e)$ C. $\pi(e-2)$ D. $\pi(e-1)$.

Câu 14: Cho $f(x) = \cos x - \frac{1}{2} \sin x$. Một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thỏa $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ là

- A. $F(x) = \sin x + \frac{1}{2} \cos x - \frac{3\sqrt{2}}{4}$ B. $F(x) = \cos x - \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}$
C. $F(x) = \sin x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{3\sqrt{2}}{4}$ D. $F(x) = \sin x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Câu 15: Giá trị của $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} dx$ là

A. $\ln 2$

B. $\frac{1}{3} \ln 2$

C. $\frac{1}{2} \ln 2$

D. $2 \ln 2$.

Câu 16: Giá trị của $\int_1^2 \frac{x dx}{1 + \sqrt{x+1}}$ là:

A. $\ln 2$

B. $\ln 2 - 3$

C. $\frac{11}{3} + \ln 2$

D. $\frac{11}{3} - 4 \ln 2$.

Câu 17: Đặt $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$. Đẳng thức nào dưới đây đúng.

A. $I_n + nI_{n-1} = e$

B. $I_n - nI_{n-1} = e$

C. $nI_n - I_{n-1} = e$

D. $I_n + I_{n-1} = e$.

Câu 18: Cho $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Hàm số nào dưới đây là một nguyên hàm của $f(x)$:

A. $-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

B. $\ln \sqrt{1+x^2}$

C. $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$

D. $\ln(x - \sqrt{1+x^2})$.

Câu 19: Giá trị của $\int_{-2}^2 (|x+1| - |x-1|) dx$ là:

A. 1

B. $\frac{1}{2}$

C. -1

D. 0.

Câu 20: Giá trị của $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$ là:

A. $\frac{8}{15}$

B. $\frac{2}{15}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{11}{15}$.

Câu 21: Một nguyên hàm của $f(x) = x \sin x$ là:

A. $x \sin x - \cos x$

B. $-x \cos x + \sin x$

C. $x \cos x + \sin x$

D. $x \cos x - \sin x$.

Câu 22: Cho $I_n = \int_1^e \ln^n x dx$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng:

A. $I_n + nI_{n+1} = e$

B. $I_n + nI_{n-1} = e$

C. $nI_n + I_{n-1} = \frac{1}{e}$

D. $nI_n - I_{n-1} = e$.

Câu 23: Giá trị của $\int_0^{\ln 2} e^x (1 + e^x)^3 dx$ là:

- A. 65 B. $\frac{65}{2}$ C. $\frac{65}{4}$ D. $63 \ln 2$.

Câu 24: Giá trị của $\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x} dx$ là :

- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{4} - \ln 2$ C. $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$ D. $\frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 25: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = \sqrt{x}$, tiếp tuyến với đồ thị tại $M(4,2)$ và trục Ox là:

- A. $\frac{8}{3}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{3}$.

Câu 26: Giá trị của $\int_0^1 x \ln(1 + x^2) dx$ là:

- A. $\ln 2 - \frac{1}{2}$ B. $\ln 2 + \frac{1}{2}$ C. $2 \ln 2 - 1$ D. $2 \ln 2 + 1$.

Câu 27: Thể tích vật thể tạo thành khi cho elip: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ quay quanh Ox là:

- A. $\frac{4}{3} \pi a^2 b^2$ B. $\frac{4}{3} \pi a b^2$ C. $\frac{4}{3} \pi a^2 b$ D. $\frac{4}{3} \pi a b$.

Câu 28: Giá trị của $\int_0^{\pi/2} \frac{x}{1 + \cos x} dx$ là

- A. $\frac{1}{2}(\pi + 2 \ln 2)$ B. $\frac{1}{2}(\pi + \ln 2)$ C. $\frac{1}{2}(\pi - 2 \ln 2)$ D. $\pi - 2 \ln 2$.

Câu 29: Giá trị của $\int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos x} dx$ là:

- A. $-\left(\frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ B. $-\frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}$

C. $\frac{\pi}{4} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $\pi + 2 \ln 2$.

Câu 30: Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \min(\sin x; \cos x) dx$ là :

A. $2 + \sqrt{2}$

B. $2 - \sqrt{2}$

C. $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 31: Cho $I = \int_0^a \frac{dx}{a^2 + x^2}$ ($a \neq 0$). Để giá trị của I bằng $\frac{\pi}{2}$ thì giá trị của a là:

A. $a = 1$

B. $a = 2$

C. $a = \frac{1}{2}$

D. $a = \frac{1}{3}$.

Câu 32: Giá trị của $\int_0^{\pi} |\cos x| \sqrt{\sin x} dx$ là:

A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{3}{4}$

Câu 33: Cho $F(x) = \int_0^x te^{-t} dt$, xét các mệnh đề sau:

I. $F'(x) = xe^{-x}$

II. $F(x)$ đạt cực trị tại $\left(1, \frac{1}{e}\right)$

III. $F(1) = 1 - \frac{2}{e}$.

Mệnh đề nào là đúng :

A. Chỉ I

B. Chỉ II

C. Chỉ III

D. I, II, III.

Câu 34: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong có phương trình:

$y = \sin^2 x \cos^3 x$, trục Ox và hai đường $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$ có giá trị là;

A. $\frac{15}{2}$

B. $\frac{3}{5}$

C. $\frac{2}{15}$

D. $\frac{1}{15}$.

Câu 35: Cho hình phẳng xác định bởi các đường: $y = \sqrt{x - e^x}$; $y = 0, x = 1$ và $x = 2$ quay quanh Ox. Thể tích vật thể tạo thành là:

A. $2e$

B. e^2

C. $\frac{1}{e^2}$

D. $\frac{2}{e}$.

Câu 36: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường: $y = (x - 2)^2$ và $y = 4$. Khi cho hình phẳng (H) quay quanh Oy thì thể tích tạo thành là:

- A. $\frac{128}{3}\pi$ B. $\frac{112}{3}\pi$ C. $\frac{121}{4}\pi$ D. $\frac{111}{4}\pi$.

Câu 37: Cho $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5x+3} - \sqrt{5x+1}}$. Một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thỏa $F(0) = 0$ là :

- A. $\frac{1}{15}[(5x+3)^{3/2} + (5x+1)^{3/2} - 1 - 3\sqrt{3}]$
 B. $\frac{1}{10}[(5x+3)^{3/2} + (5x+1)^{3/2} - 3\sqrt{3}]$
 C. $\frac{1}{10}[(5x+3)^{3/2} - (5x+1)^{3/2} + 1 + 3\sqrt{3}]$
 D. $\frac{1}{15}[(5x+3)^{3/2} - (5x+1)^{3/2} + 1 + 3\sqrt{3}]$.

Câu 38: Đặt $I = \int_0^a \cos(x+a)dx$, $a \in [\pi, 3\pi]$. Để $I = \sin a$ thì giá trị của a là:

- A. π B. $\frac{\pi}{2}$ C. 2π D. $\frac{\pi}{4}$.

Câu 39: Giá trị của $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{1+3^x} dx$ là:

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. π C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{6}$.

Câu 40: Giá trị của $\int_0^1 \frac{x+3}{e^x} dx$ là:

- A. $5 - 4e$ B. $4e - 5$ C. $4 - \frac{5}{e}$ D. $5 - \frac{4}{e}$.

Câu 41: Cho $f(x) = \int_0^x \ln t dt$. Đạo hàm $f'(x)$ là hàm số nào dưới đây :

- A. $f'(x) = \frac{1}{x}$ B. $f'(x) = \ln x$ C. $f'(x) = \ln^2 x$ D. $f'(x) = \frac{1}{2} \ln^2 x$

Câu 42: Cho $I = \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx$ và $J = \int_0^{\pi} e^x \sin^2 x dx$.

Hãy chọn mệnh đề đúng:

- A. $I = J = \frac{1}{2}e^{\pi}$ B. $I + J = 2e^{\pi}$ C. $I + J = e^{\pi} - 1$ D. $I - J = e^{\pi}$.

Câu 43: Giá trị của: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$ là:

- A. $\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$ B. $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$ C. $\frac{\pi}{4} - 1$ D. $\frac{\pi}{4} + 1$.

Câu 44: Thể tích vật thể sinh ra khi cho hình phẳng giới hạn bởi $y = 2x - x^2$, trục Ox quay quanh trục Ox là:

- A. $\frac{16}{15}\pi$ B. $\frac{15}{16}\pi$ C. $\frac{3}{5}\pi$ D. $\frac{3}{10}\pi$.

Câu 45: Cho hình phẳng xác định bởi: $\begin{cases} y = \sin x + \cos x \\ x = 0, x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ quay quanh Ox, thể

tích tạo thành là:

- A. $\frac{\pi^2}{4}$ B. $\pi(\pi + 2)$ C. $\pi(\pi - 2)$ D. $\frac{\pi(\pi + 2)}{2}$.

Câu 46: Giá trị của $I = \int_0^{\sqrt{3}} x^3 \sqrt{x^2 + 1} dx$ là:

- A. $\frac{58}{15}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{18}{51}$ D. $\frac{15}{58}$.

Câu 47: Giá trị của $\int_0^{\pi} \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x + 2} dx$ là:

- A. $2(\ln 3 - 1)$ B. $2(\ln 2 + 1)$ C. $2(\ln 3 + 1)$ D. $2\ln 2$.

Câu 48: Cho $I = \int_0^1 |x - 2m| dx$ khi $m > \frac{1}{2}$ thì giá trị của I là:

- A. $2m + 1$ B. $2m - 1$ C. $2m + 2$ D. $2m - \frac{1}{2}$.

Câu 49: Giá trị của $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$ là:

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{6}$ D. 2.

Câu 50: Hàm số nào dưới đây là một nguyên hàm của hàm số $y = \tan^2 x$

- A. $\frac{1}{3} \tan^3 x$ B. $\frac{1}{\cos^2 x}$ C. $x + \tan x$ D. $\tan x - x$

Câu 51: Giá trị của $\int_0^2 \text{Max}(x; x^2) dx$ là:

- A. $\frac{17}{6}$ B. $\frac{8}{3}$ C. 2 D. $\frac{15}{11}$

Câu 52: Giá trị của $\int_0^2 |x-1| dx$ là:

- A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. 1.

Câu 53: Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^5 x}{\sin^5 x + \cos^5 x} dx$ và $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^5 x}{\sin^5 x + \cos^5 x} dx$

Xét các mệnh đề sau:

- I. $I = J$ II. $I + J = \frac{\pi}{2}$ III. $I = \frac{\pi}{2} \cdot J$

Mệnh đề nào đúng

- A. Chỉ có I B. Chỉ có II C. I và II D. Chỉ có III.

Câu 54: Mệnh đề nào dưới đây là đúng:

- A. $\int \sin x \cdot \cos x dx = \int \sin x dx \cdot \int \cos 2x dx$ B. $\int_0^1 x dx < \int_0^1 x^{10} dx$
C. $\int_{-3}^3 \sqrt{x^2} dx = 0$ D. $f(x) = \int_1^x e^{2t} dt \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot e^{2x} dx$

Câu 55: Cho hình phẳng xác định bởi $\begin{cases} y^2 = (x-1)^3 \\ x = 2 \end{cases}$ quay quanh Ox. Thể tích vật thể tạo thành là:

- A. $\frac{\pi}{8}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. 2π D. $\frac{\pi}{3}$.

Câu 56: Cho biết $\int_0^1 [2f(x)dx - g(x)]dx = 6$ và $\int_0^1 [f(x)dx + g(x)]dx = 9$. Giá trị của $\int_0^1 g(x)dx$ là:

- A. 4 B. 5 C. 2 D. $\frac{5}{2}$.

Câu 57: Diện tích giới hạn bởi các đường $\begin{cases} xy = 4 \\ x = a, x = 3a \end{cases} (a > 0)$ là:

- A. $\ln 3$ B. $2\ln a$ C. $4\ln 3$ D. $\ln 3a$.

Câu 58: Cho hình phẳng xác định bởi: $\begin{cases} x^3 = y^3 \\ y = 0, x = 1 \end{cases}$ quay quanh Oy. Thể tích tạo thành là:

- A. $\frac{2}{3}\pi$ B. $\frac{4}{7}\pi$ C. $\frac{1}{4}\pi$ D. $\frac{3}{4}\pi$.

Câu 59: Giá trị của $\int_0^1 x.e^{-x^2}dx$ là:

- A. $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$ B. $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{e}\right)$ C. $2\left(1 + \frac{1}{e}\right)$ D. $1 + 2e$.

Câu 60: Diện tích giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x(x-1)(x-2)$ và trục Ox là:

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. 1.

Đáp Án

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Chọn	C	B	C	D	C	A	B	A	B	D
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Chọn	A	C	D	C	C	D	A	C	D	A
Câu	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Chọn	B	B	C	D	A	A	B	C	A	B
Câu	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Chọn	C	D	D	C	B	A	A	C	A	C
Câu	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Chọn	B	C	B	B	D	A	A	D	C	D
Câu	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Chọn	A	A	C	C	B	A	C	B	A	B

Chương 3: ĐẠI SỐ TỔ HỢP

§1 Vấn đề 1: Hoán vị – Chỉnh hợp – Tổ hợp

A. Tóm tắt lý thuyết

1. Quy tắc cộng - Quy tắc nhân:

+ Nếu có m cách chọn đối tượng x , n cách chọn đối tượng y và nếu cách chọn đối tượng x không trùng với bất kì cách chọn đối tượng y nào thì có $m + n$ cách chọn một trong các đối tượng đã cho.

+ Nếu có m cách chọn đối tượng x và sau đó với mỗi cách chọn x như thế có n cách chọn đối tượng y thì có $m \times n$ cách chọn cặp đối tượng (x, y)

Chú ý: Các quy tắc có thể mở rộng cho n đối tượng.

2. Hoán vị

+ Định nghĩa: Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi cách sắp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là: một hoán vị của n phần tử đó.

+ Công thức: $P_n = n!$

3. Chỉnh hợp:

+ Định nghĩa: Cho tập A gồm n phần tử. Mỗi bộ phận gồm k phần tử ($k \leq n$) của A gọi là: một tổ hợp chập k của n phần tử đã cho.

+ Công thức $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Tính chất: $C_n^k = C_n^{n-k}$

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k.$$

B. Bài tập áp dụng:

Bài 1:

- Có bao nhiêu số lẻ gồm 4 chữ số khác nhau?
- Có bao nhiêu số chẵn gồm 6 chữ số khác nhau trong đó chữ số đầu tiên là lẻ?
- Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau trong đó có đúng 3 chữ số lẻ và 3 chữ số chẵn?

Hướng dẫn giải:

a) Gọi $x = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$ là số phải tìm. Có 5 cách chọn a_4 , 8 cách chọn a_1 và A_8^2 cách chọn 4 chữ số còn lại, do đó có tất cả: $5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 2240$ số.

b) Gọi $x = \overline{a_1 a_2 \dots a_6}$.

Có 5 cách chọn a_1 (lẻ), có 5 cách chọn a_6 và có A_8^4 cách chọn 4 chữ số còn lại. Vậy có $5 \cdot 5 \cdot A_8^4 = 42000$ số.

c) Giả sử chọn a_1 bất kì thì có: C_5^3 cách chọn 3 chữ số chẵn và có C_5^3 cách chọn 3 chữ số lẻ nên có: $C_5^3 \cdot C_5^3$ cách chọn 6 chữ số gồm 3 chữ số chẵn và 3 chữ số lẻ, sau đó có $6!$ cách xếp 6 số đó thành số có 6 chữ số khác nhau, vậy có: $6! C_5^3 \cdot C_5^3 = 72.000$ số.

+ Với $a_1 = 0$ thì có C_4^2 cách chọn 2 chữ số chẵn và có C_5^3 cách chọn 3 chữ số lẻ sau đó có $5!$ cách xếp 5 chữ số đó để tạo thành số có 6 chữ số. Vậy có: $C_4^2 \cdot C_5^3 \cdot 5! = 7200$ số.

Do đó có: $72.000 - 7.200 = 64.800$ số.

Bài 2: Tìm số đường chéo của đa giác lồi có n cạnh ($n \geq 4$). Tìm số cạnh của đa giác lồi có 14 đường chéo

Hướng dẫn giải:

+ Qua 2 điểm có 1 đoạn thẳng nên số đoạn thẳng tạo bởi n đỉnh là: C_n^2 .

Trong số đó có n đoạn là cạnh của đa giác nên số đường chéo còn lại là:

$$C_n^2 - n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

+ Gọi n là: số cạnh của đa giác có 14 đường chéo

$$\text{Ta có: } \frac{n(n-3)}{2} = 14 \Leftrightarrow n = 7.$$

Bài 3: Có bao nhiêu số gồm 5 chữ số khác nhau được lập từ các chữ số 3, 4, 5, 6, 7. Tính tổng của các số đó.

Hướng dẫn giải:

+ Số gồm 5 chữ số tạo bởi 3, 4, 5, 6, 7 là 1 hoán vị của 5 phần tử, do đó có tất cả $P_5 = 5! = 120$ số.

+ Gọi x là 1 số ở trên, ta có duy nhất 1 số y cũng tạo bởi các chữ số trên mà $x + y = 111110$.

+ Vì có $\frac{120}{2} = 60$ cặp số như trên nên:

$$S = 60 + 111110 = 666660.$$

Bài 4: Có bao nhiêu số lẻ gồm 6 chữ số khác nhau và lớn hơn 600.000.

Hướng dẫn giải:

Gọi $x = \overline{a_1 a_2 \dots a_6}$.

Vì $x > 600.000$ nên có thể chọn $a_1 \in \{6, 7, 8, 9\}$.

+ Nếu $a_1 = 6 \vee a_1 = 8$ thì có 5 cách chọn a_6 và có A_8^4 cách chọn các số còn lại. Vậy có: $2 \cdot 5 \cdot A_8^4 = 16.800$ số.

+ Nếu $a_1 = 7$ hay $a_1 = 9$ thì có 5 cách chọn a_6 và có A_8^4 cách chọn các chữ số còn lại nên có: $2 \cdot 5 \cdot A_8^4 = 16.800$ số.

Bài 5:

a) Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau và chia hết cho 10?

b) Hỏi có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số từ tập hợp $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ trong đó chữ số 1 và số 6 có mặt 2 lần các chữ số khác có mặt 1 lần?

Hướng dẫn giải:

a) Gọi $x = \overline{a_1 a_2 \dots a_5}$, vì $x : 10$ nên $a_5 = 0$ và có A_9^4 cách chọn 4 số còn lại.

$$\text{Vậy có: } A_9^4 = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 3168.$$

b) Gọi $X = \{1_a, 1_b, 2, 3, 4, 5, 6_a, 6_b\}$.

Để tạo thành số có 8 chữ số khác nhau của X thì có $P_8 = 8!$ số nhưng với cách tính trên vì $1_a = 1_b$ và $6_a = 6_b$ nên thừa đi $2!2!$ lần, do đó có:

$$\frac{8!}{2!2!} = 10080 \text{ số.}$$

Bài 6: Một tổ gồm 5 học sinh nam và 5 học sinh nữ xếp thành một hàng dọc.

a) Có bao nhiêu cách sắp xếp khác nhau?

b) Có bao nhiêu cách xếp 5 nam đứng kề nhau và 5 nữ đứng kề nhau?

Hướng dẫn giải:

a) Có $10!$ cách sắp xếp thành 1 hàng dọc gồm 10 học sinh bất kì.

b) . Trường hợp 1: Xếp 5 nam trước thì có $5!$ cách sau đó xếp 5 nữ tiếp theo thì có $5!$, do đó có $5!5!$ cách xếp 10 học sinh thành 1 dãy như trên.

. Trường hợp 2: Xếp 5 nữ trước rồi 5 nam sau thì cũng có: $5!5!$ cách

Vậy có tất cả: $2.5!.5! = 28.800$.

Bài 7: Một lớp học gồm có 30 học sinh nam và 15 nữ. Để chọn 6 học sinh đi làm vệ sinh thì có bao nhiêu cách nếu:

a) Chọn bất kì?

b) Chọn phải có ít nhất 2 nữ?

Hướng dẫn giải:

a) Mỗi cách chọn 6 học sinh bất kì trong số 45 học sinh là 1 tổ hợp chập 6 của 45 phần tử, do đó có: $C_{45}^6 = \frac{45!}{6!39!}$.

b) Trường hợp chọn : 2 nữ và 4 nam thì có: $C_{15}^2.C_{30}^4$ cách.

: 3 nữ và 3 nam thì có: $C_{15}^3.C_{30}^3$ cách.

: 4 nữ và 2 nam thì có: $C_{15}^4.C_{30}^2$ cách.

: 5 nữ và 1 nam thì có: $C_{15}^5.C_{30}^1$ cách

: 6 nữ thì có C_{15}^6 cách.

Vậy có tất cả: $C_{15}^2.C_{30}^4 + C_{15}^3.C_{30}^3 + C_{15}^4.C_{30}^2 + C_{15}^5.C_{30}^1 + C_{15}^6$ cách.

Bài 11: Cho $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Hỏi từ các phần tử của X ta có thể lập được:

1) Bao nhiêu số chẵn có 4 chữ số khác nhau đôi một?

2) Bao nhiêu số gồm 3 chữ số khác nhau đôi một và chia hết cho 5?

3) Bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau đôi một và chia hết cho 9?

Hướng dẫn giải:

1) Gọi $x = \overline{a_1a_2a_3a_4}$, chẵn.

Nếu $a_4 = 0$ thì có A_5^3 cách chọn 3 chữ số còn lại.

Nếu $a_4 \neq 0$ thì có 2 cách chọn a_4 , có 4 cách chọn a_1 và có A_4^2 cách chọn 2 số còn lại.

Do đó có tất cả: $A_5^3 + 2.4.A_4^2 = 146$ số.

2) Gọi $y = \overline{a_1 a_2 a_3}$.

y chia hết cho 5 nên $a_3 = 0$ hoặc $a_3 = 5$ (có 2 cách chọn).

. Nếu $a_3 = 0$ thì có 5 cách chọn a_1 và 4 cách chọn a_2 nên có: $5 \times 4 = 20$ số.

. Nếu $a_3 = 5$ thì có 4 cách chọn a_1 và 4 cách chọn a_2 nên có: $4 \times 4 = 16$ số.

Vậy có: $20 + 16 = 36$ số.

3) Gọi $z = \overline{a_1 a_2 a_3}$.

z chia hết cho 9 nên $a + b + c = 9$, do đó chỉ có thể chọn trong các tập hợp $\{0, 4, 5\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$.

. Đối với $X_1 = \{0, 4, 5\}$ thì có 4 số.

. Đối với mỗi tập hợp $\{1, 3, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$ thì có $3!$ Số. Vậy có:

$4 + 3! + 3! = 16$ số.

Bài 12: Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên khác nhau gồm 7 chữ số sao cho tổng các chữ số của mỗi số đó là 1 số chẵn.

Hướng dẫn giải:

Đề ý rằng có: $9 \cdot 10^6$ số tự nhiên gồm 7 chữ số.

+ Gọi $x = \overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_7}$ và $\overline{a_1' a_2' \dots a_7'}$ sao cho $a_i + a_i' = 9$ thì tổng các chữ số của cặp x, y như trên là: $9 \times 7 = 63$ là số lẻ nên nếu x có tổng các chữ số là chẵn thì y có tổng các chữ số là lẻ và mỗi x thì chỉ có 1 số y tương ứng như trên do đó số các số gồm 7 chữ số có tổng là lẻ. Vậy có

tất cả là: $\frac{9 \cdot 10^6}{2} = 4.500.000$ số có 7 chữ số mà tổng các chữ số là chẵn.

Bài 13:

a) Từ 3 chữ số: 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số trong đó phải có mặt cả 3 chữ số trên?

b) Tính tổng tất cả các số gồm 5 chữ số khác nhau và không chứa chữ số 0.

Hướng dẫn giải:

- a) Với 3 chữ số 2, 3, 4 ta lập được $3! = 6$ số có 3 chữ số khác nhau, với 2 vị trí còn lại (số có 5 chữ số) mỗi vị trí ta có thể có 3 cách chọn 1 trong 3 số để xếp vào, do đó có tất cả: $6 \times 3 \times 3 = 54$ số.

- b) Gọi $x = \overline{a_1 a_2 \dots a_5}$ và $y = \overline{a_1' a_2' a_3' \dots a_5'}$ sao cho: $a_i + a_i' = 10$ ($i = 1, \dots, 5$) ta có: $x + y = 1111100$.

. Số gồm 5 chữ số không chứa 0 là: A_9^5 .

Vậy tổng tất cả các số gồm 5 chữ số khác nhau và không chứa số 0 là:

$$\frac{A_9^5 \times 111.110}{2} = 7.199328.$$

Bài 14: Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

- a) Có bao nhiêu tập hợp con X của A thỏa điều kiện X chứa số 1 và không chứa số 2?
- b) Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 5 chữ số khác nhau lấy từ tập hợp A và không bắt đầu bởi 1, 2, 3?

Hướng dẫn giải:

- a) Xét $Y = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, ta có số tập hợp con của Y là: $2^6 = 64$ với mỗi tập hợp này ta thêm số 1 vào thì được một tập hợp con X của A thỏa điều kiện bài toán. Vậy có: $2^6 = 64$ tập hợp con X của A có chứa số 1 và không chứa số 2.

- b) Gọi $x = \overline{a_1 \dots a_5}$ và $y = \overline{123a_4 a_5}$.

. x chẵn nên có 4 cách chọn a_5 sau đó có A_7^4 cách chọn các số còn lại do đó có: $4 \cdot A_7^4 = 3360$ số.

. y chẵn, để chọn a_5 thì có 3 cách chọn và để chọn a_4 thì 4 cách vậy có: $3 \times 4 = 12$ số.

Vậy có tất cả: $3360 - 12 = 3348$ số.

Bài 15: Một học sinh có 12 cuốn sách khác nhau đôi một gồm 2 sách toán, 4 sách văn và 6 sách anh văn. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp tất cả các cuốn sách lên kệ sách dài nếu các sách cùng môn xếp kề nhau?

Hướng dẫn giải:

- . Để xếp 3 loại sách lên kệ dài thì có $3!$ Cách.
 - . Để xếp sách toán thì có $2!$ cách, xếp sách văn thì có $4!$ cách và để xếp sách anh văn thì có $6!$ cách.
- Do đó có: $3!2!4!6! = 207.360$ cách.

Bài 16: Một bàn dài có 2 dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy 6 ghế. Ta muốn xếp 6 học sinh của trường A và 6 học sinh của trường B vào ngồi. Hỏi có bao nhiêu cách xếp trong các trường hợp sau:

- 1) Bất cứ 2 học sinh nào ngồi cạnh nhau hoặc đối diện nhau phải khác trường.
- 2) Bất cứ 2 học sinh nào ngồi đối diện nhau thì phải khác trường.

Hướng dẫn giải:

- 1) Ta có thể đánh số thứ tự từ 1 đến 12 các ghế, có 2 cách xếp học sinh vào ngồi các ghế trên (trường A ghế chẵn, trường B ghế lẻ hoặc ngược lại). Mỗi trường hợp có $6!$ cách xếp học sinh trường A và $6!$ cách xếp học sinh trường B. Vậy có $2 \cdot 6! \cdot 6! = 1036800$ cách.
- 2) Học sinh thứ 1 của trường A xếp vào ngồi thì có 12 cách, sau đó chọn 1 học sinh của trường B thì có 6 cách chọn xếp học sinh đó vào ngồi đối diện. Học sinh thứ 2 của trường A xếp vào ngồi thì có 10 cách, có 5 cách chọn học sinh của trường B để xếp ngồi đối diện, lí luận tương tự ta có tất cả: $12 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 5 + 8 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \cdot 1 = 33177600$.

Bài 17: Cho $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số x gồm 5 chữ số khác nhau của X trong các trường hợp.

- 1) Số x là số chẵn?
- 2) Một trong 3 chữ số đầu tiên của x là số 1?

Hướng dẫn giải:

- 1) Gọi $x = \overline{a_1 a_2 \dots a_5}$
 - + Xét cả trường hợp a_1 có thể là số 0.
 - . Có 4 cách chọn a_5 sau đó có A_7^4 cách chọn 4 số còn lại, vậy trường hợp này có: $4 \cdot A_7^4 = 3360$ số.
 - + Xét trường hợp: $x = \overline{0 a_2 a_3 a_4 a_5}$ ($a_1 = 0$).
 - Có 3 cách chọn a_5 và A_6^3 cách chọn 3 số còn lại.

Vậy có: $3.A_6^3 = 360$ số.

Do đó có tất cả là: $3360 - 360 = 3000$ số.

- 2) Xét trường hợp a_1 có thể bằng 0: Có 3 cách chọn vị trí cho số 1 sau đó có A_7^4 cách chọn các số còn lại.

Vậy có: $3.A_7^4 = 2520$ số.

+ Trường hợp: $x = \overline{0a_2a_3a_4a_5}$ ($a_1 = 0$)

Có 2 cách chọn vị trí cho số 1 và có A_6^3 cách chọn cho 3 chữ số còn lại, do đó có: $2.A_6^3 = 240$ số.

Vậy có: $2520 - 240 = 2280$ số.

Bài 18: Xét các số gồm 9 chữ số trong đó năm chữ số 1 và 4 chữ số còn lại là: 2, 3, 4, 5. Hỏi có bao nhiêu số như thế nếu:

- 1) Năm chữ số 1 được sắp xếp liền nhau. 2) Các chữ số 1 xếp tùy ý.

Hướng dẫn giải:

- 1) Gọi $11111 = a$ và $X = \{a, 2, 3, 4, 5\}$ một số gồm 9 chữ số trong đó 5 số 1 đứng liền kề nhau là: một số gồm 5 chữ số của X nên có $P_5 = 5! = 120$ số như thế.
- 2) Xếp các số 2, 3, 4, 5 vào 4 vị trí ta có $P_4 = 4!$ cách sau đó xếp 5 số 1 vào 5 vị trí còn lại thì chỉ có 1 cách, vậy có $A_9^4 = 3024$ số.

Bài 19: Một hộp đựng 4 viên bi đỏ, 5 viên bi trắng và 6 viên bi vàng, người ta chọn ra 4 viên bi trong hộp này. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho trong số bi lấy ra không có đủ 3 màu?

Hướng dẫn giải:

. Số cách chọn 4 viên bi bất kì trong 15 viên của hộp là: $C_{15}^4 = 1365$.

. Số cách chọn 4 viên bi cả 3 màu là:

+ Trường hợp gồm: 2 đỏ, 1 trắng, 1 vàng thì có: $C_4^2.C_5^1.C_6^1 = 180$.

+ Trường hợp gồm: 1 đỏ, 2 trắng, 1 vàng thì có: $C_4^1.C_5^2.C_6^1 = 240$.

+ Trường hợp gồm: 1 đỏ, 1 trắng, 2 vàng thì có: $C_4^1.C_5^1.C_6^2 = 300$.

Do đó số cách chọn để có 4 viên bi không đủ 3 màu là:

$1365 - (180 + 240 + 300) = 645$ cách.

Bài 20: Để kiểm soát số xe máy người ta lập các bảng số xe, mọi bảng số xe có 4 chữ số. Hỏi:

- a) Lập được bao nhiêu bảng số xe khác nhau?
- b) Lập được bao nhiêu bảng số xe mà 4 chữ số khác nhau?
- c) Lập được bao nhiêu bảng số xe mà chữ số sau lớn hơn chữ số đứng liền trước đó?

Hướng dẫn giải:

- a) Gọi $x = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$, có 10 cách chọn mỗi chữ số trong bảng số xe nên có: 10^4 cách chọn bảng số xe có 4 chữ số, vì không có bảng số 0000 nên thực tế chỉ lập được: $10^4 - 1 = 9999$ số.
- b) Số bảng số xe mà 4 chữ số đều khác nhau là: A_{10}^4 bảng.
- c) Ta xét $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$, $A = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$.

Số tập hợp con của A gồm 4 phần tử là: C_{10}^4 . Mỗi tập hợp con này chỉ có 1 cách xếp thứ tự $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$.

Vậy có tất cả: $C_{10}^4 = 210$ bảng số.

Bài 21: Với các chữ số: 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau nếu:

- a) Các số này lớn hơn 300.000.
- b) Các số này lớn hơn 300.000 và chia hết cho 5.
- c) Các số này lớn hơn 350.000.

Hướng dẫn giải:

Gọi $x = \overline{a_1 a_2 \dots a_6}$ là, số gồm 6 chữ số khác nhau.

- a) $x > 300.000$ nên có 3 cách chọn a_1 (các số 3, 4, 5) sau đó lần lượt 5, 4, 3, 2, 1 cách chọn các chữ số còn (hoặc $P_5 = 5!$ cách chọn bộ 5 số còn lại)
Do đó có: $3 \cdot P_5 = 3 \cdot 5! = 360$ số.

- b) $x > 300.000, x : 5$.

x chia hết cho 5 nên $a_6 = 0$ hoặc $a_6 = 5$.

- Nếu $a_6 = 0$, có 3 cách chọn a_1 và có $P_4 = 4!$ cách chọn bộ 4 chữ số còn lại nên có $3 \cdot 4! = 72$ số.

+ Nếu $a_6 = 5$, có 2 cách chọn a_1 sau đó có $P_4 = 4!$ Cách chọn 4 chữ số còn lại nên có $2 \cdot 4! = 48$ số.

Do đó có tất cả: $72 + 48 = 120$ số.

c) $x > 350.000$ nên a_1 chỉ có thể là 3, 4, 5.

+ Nếu $a_1 = 4$ hoặc $a_1 = 5$ (có 2 cách chọn) thì có $P_5 = 5!$ cách chọn bộ 5 chữ số còn lại nên có $2 \cdot 5! = 240$ số.

+ Nếu $a_1 = 3$ thì phải chọn $a_2 = 5$, sau đó có $4!$ cách chọn các số còn lại nên có $4! = 24$ số.

Vậy có tất cả: $240 + 24 = 264$ số.

Bài 22: Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau biết rằng tổng của 3 chữ số đó bằng 12.

Hướng dẫn giải:

Ba chữ số có tổng bằng 12 phải là: 3 phần tử của các tập hợp sau: $\{0, 3, 9\}$, $\{0, 4, 8\}$, $\{2, 4, 6\}$, $\{3, 4, 5\}$, $\{0, 5, 7\}$, $\{1, 2, 9\}$, $\{1, 3, 8\}$, $\{1, 4, 7\}$, $\{1, 5, 6\}$, $\{2, 3, 7\}$. Đối với các tập hợp có chứa số 0 ta có: $2 \cdot 2! = 4$ số. Đối với mỗi tập hợp còn lại ta có $3! = 6$ số. Vậy có tất cả: $3 \cdot 4 + 7 \cdot 6 = 54$ số.

Bài 23: Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 người khách gồm 3 nam và 2 nữ ngồi vào 1 dãy 8 ghế nếu:

a) Họ ngồi chỗ nào cũng được.

b) Họ ngồi kề nhau.

c) 3 Nam ngồi kề nhau và 2 nữ ngồi kề nhau và giữa 2 nhóm có ít nhất 1 ghế trống.

Hướng dẫn giải:

a) Có A_8^5 cách xếp 5 người vào dãy 8 ghế nếu họ ngồi tùy ý.

b) Có 4 vị trí ghế để 5 người ngồi kề nhau trong dãy gồm 8 ghế, ứng với mỗi vị trí này có $5!$ cách xếp 5 chỗ ngồi cho 5 người, do đó có: $4 \times 5! = 480$ cách xếp.

c) Giữa 2 nhóm có 1 ghế trống: hai nữ chỉ có thể xếp ở các vị trí: 1 – 2, 2 – 3, 3 – 4: có 3 vị trí.

+ Giữa hai nhóm có 2 ghế trống: Hai nữ chỉ có thể xếp ở các vị trí 1 – 2, 2 – 3. Có 2 vị trí.

+ Giữa 2 nhóm có 3 ghế trống thì chỉ có 1 vị trí để xếp 2 nữ.

Ứng với mỗi vị trí trên thì có $2!$ cách xếp nữ và $3!$ cách xếp nam, do đó có tất cả: $6 \cdot 3! \cdot 2! = 72$ cách xếp.

Bài 24:

a) Một họ gồm n đường thẳng song song và một họ gồm m đường thẳng song song khác. Hỏi có bao nhiêu hình bình hành tạo thành?

b) Cho 2 đường thẳng song song d_1 và d_2 . Trên d_1 có 10 điểm, trên d_2 có 15 điểm hỏi có bao nhiêu tam giác tạo thành bởi các điểm ở trên?

Hướng dẫn giải:

a) Mỗi hình bình hành tạo bởi 2 đường thẳng của họ thứ 1 và 2 đường thẳng của họ thứ 2.

Với n đường của họ thứ 1 thì có C_n^2 cặp đường thẳng

Với m đường thẳng của họ thứ 2 thì có C_m^2 cặp đường thẳng. Do đó có

tất cả: $C_n^2 \times C_m^2 = \frac{n(n-1)m(m-1)}{4}$ hình bình hành.

b) Mỗi tam giác được tạo bởi 2 đỉnh trên 1 đường thẳng và 1 đỉnh trên đường còn lại.

+ Tam giác có đáy trên d_1 có C_{10}^2 cách chọn 2 điểm trên d_1 . Do đó số tam giác có đáy trên d_1 là: $15C_{10}^2$.

+ Tam giác có đáy trên d_2 : Có C_{15}^2 cách chọn 2 điểm trên d_2 . Do đó số tam giác có đáy trên d_2 là: $10.C_{15}^2$.

Vậy có tất cả: $15C_{10}^2 + 10C_{15}^2$ tam giác tạo thành.

Bài 25: Một đa giác lồi 10 cạnh, xét các tam giác mà 3 đỉnh là đỉnh của đa giác trên. Hỏi trong số đó có bao nhiêu tam giác mà cả 3 cạnh của nó đều không phải là cạnh của đa giác.

Hướng dẫn giải:

+ Số tam giác có đỉnh là đỉnh của đa giác là: $C_{10}^3 = 120$.

+ Số tam giác có 1 cạnh là cạnh của đa giác là: $6 \times 10 = 60$.

+ Số tam giác có 2 cạnh là cạnh của đa giác là: 10.

Do đó có $120 - (60 + 10) = 50$ tam giác có 3 cạnh không phải là cạnh của đa giác.

C. Bài Tập Tự Luyện:

Bài 1: Với các chữ số: 2, 3, 5, 8 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên thỏa:

- a) Lớn hơn 400 và nhỏ hơn 600.
- b) Gồm 4 chữ số khác nhau và chia hết cho 4.

Bài 2: Một dãy gồm 5 ghế dành cho 3 nam và 2 nữ. Có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi nếu:

- a) Họ ngồi chỗ nào cũng được.
- b) Nam ngồi kề nhau, nữ ngồi kề nhau.
- c) Chỉ có nữ sinh ngồi kề nhau.

Bài 3: Một phòng khách có vị trí để trang trí: Tranh, ảnh, tượng. Chủ nhà muốn trang trí bằng cách xếp 4 bức tranh vào 1 chỗ, 3 bức ảnh vào 1 chỗ thứ hai và 2 pho tượng vào chỗ còn lại. Hỏi có bao nhiêu cách trang trí khác nhau

Bài 4: Với các chữ số: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ta muốn lập các số gồm 5 chữ số khác nhau.

- a) Hỏi có bao nhiêu số trong đó có mặt số 6?
- b) Có bao nhiêu số trong đó có mặt số 1 và 2?

Bài 5: Với các chữ số: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể thành lập được bao nhiêu số có 5 chữ số khác nhau trong đó:

- a) Phải có mặt số 0
- b) Phải có mặt số 6
- c) Phải có mặt số 0 và 6.

Bài 6: Thầy giáo có 12 cuốn sách đôi một khác nhau trong đó gồm 5 cuốn văn, 4 cuốn âm nhạc và 3 cuốn hội họa. Ông lấy ra 6 cuốn để tặng cho 6 học sinh: A, B, C, D, E, F mỗi người 1 cuốn.

- a) Giả sử thầy giáo chỉ tặng hai loại sách văn và âm nhạc thì có bao nhiêu cách?
- b) Giả sử thầy giáo muốn sau khi tặng xong mỗi một trong 3 thể loại trên đều phải còn lại ít nhất 1 cuốn. Hỏi có bao nhiêu cách tặng?

Bài 7: Cho $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Hỏi có bao nhiêu số gồm 8 chữ số của A đồng thời thỏa:

- a) Số 0 có mặt 3 lần, mỗi chữ số khác có mặt một lần.
- b) Các số tạo thành là chẵn và không bắt đầu bởi nhóm các số 1000.

Bài 8: Người ta xếp ngẫu nhiên 5 lá phiếu ghi số thứ tự từ 1 đến 5 cạnh nhau.

- 1) Có bao nhiêu cách sắp xếp để các phiếu số chẵn cạnh nhau?

2) Có bao nhiêu cách xếp để các phiếu thành 2 nhóm chẵn, lẻ riêng biệt?

Bài 9: Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số sao cho không có chữ số nào lặp lại đúng 3 lần?

Bài 10: Một nhóm gồm 14 người: 8 nam và 6 nữ trong đó có A và B. Ta muốn chọn tổ công tác gồm 6 người. Hỏi số cách chọn trong mỗi trường hợp sau:

a) Tổ phải có cả nam lẫn nữ.

b) Tổ phải có 1 tổ trưởng và 5 tổ viên, hơn nữa A và B không đồng thời có mặt trong tổ.

Bài 11: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số gồm 10 chữ số trong đó số 6 lặp lại 3 lần, các số còn lại một lần:

D. Hướng dẫn – Đáp số:

Bài 1:

a) $x = \overline{a_1 a_2 a_3}$ $400 < x < 600 \Rightarrow a_1 = 5; a_2, a_3$ có 4 cách chọn. Vậy có: $4.4.1 = 16$ số.

b) $y = \overline{b_1 b_2 b_3 b_4}$; $y : 4 \Rightarrow \overline{b_3 b_4}$ phải chia hết cho 4. Có 3 cách chọn cặp (b_3, b_4) , do đó có $3.2.1 = 6$ số.

Bài 2:

a) $P_5 = 5!$.

b) Có $2 \times 3! \times 2! = 24$ cách.

c) Có 2 vị trí để xếp 2 nữ sau đó $3!$ cách xếp nam và $2!$ cách xếp nữ do đó có: $2 \cdot 3! \cdot 2! = 24$ cách.

Bài 3: Có $3!4!3!2! = 1728$ cách.

Bài 4:

a) Có 5 cách xếp vị trí của số 6 (số có 5 chữ số). Sau đó có A_5^4 cách chọn 4 số còn lại. Vậy có $5 \times A_5^4 = 600$ số.

b) Có A_5^2 cách xếp 2 số 1 và 2 sau đó có A_4^3 cách xếp hai số còn lại, vậy có: $A_5^2 \cdot A_4^3 = 480$ số.

Bài 5:

a) $4.A_6^4 = 1440$ số.

b) Số có 5 chữ số khác nhau là: $6.A_6^4 = 2160$ số.

Số có 5 chữ số khác nhau mà không có số 6 là: $5.A_5^4 = 600$ số.

Vậy có: $2160 - 600 = 1560$ số.

c) Nếu $a_1 = 6$ thì có: $4.A_5^3$ số.

Nếu $a_1 \neq 6$ thì có $A_4^2.A_5^3 = 720$ số.

Do đó có: $4.A_5^3 + A_4^2.A_5^3 = 960$ số.

Bài 6:

a) Có $6!C_9^6 = 60480$ cách.

b) Có $(C_{12}^6 - 7 - C_8^2 - C_4^3)6! = 579.600$ cách.

Bài 7:

+ Chọn số thỏa tính chất a:

. Chọn vị trí số 0, có $C_7^3 = 35$ cách, sau đó có $5!$ cách xếp các số còn lại.

. Trong các số trên ta xét các số lẻ: Có 3 cách chọn số tận cùng, chọn chỗ cho số 0 thì có $C_6^3 = 20$ cách.

Do đó có: $3 \times 20 \times 24 = 1440$ số lẻ.

Trong các số trên các số bắt đầu bởi 1000 là $4!$ số và các số lẻ bắt đầu bởi 1000 là $2 \cdot 3! = 12$ số.

Vậy có tất cả: $35 \cdot 5! - (1440 + 24) + 12 = 2748$ số.

Bài 8: a) Có $4 \cdot 2 \cdot 6 = 48$ cách.

b) Có $2 \cdot 3!2! = 24$ cách.

Bài 9:

+ Có $9 \cdot 10^3 = 9000$ số gồm 4 chữ số.

+ Ta loại các trường hợp mà chữ số lặp lại 3 lần.

$a_1 \neq 0$: Có 9 cách chọn a_1 , chọn $a_2 = a_3 = a_1$ có 1 cách và chọn $a_4 \neq a_1$ có 9 cách. Vậy có 81 số.

Tương tự các trường hợp còn lại cũng có 81 số.

Vậy có: $4 \cdot 81 = 324$ số.

Do đó còn lại: $9000 - 324 = 8676$ số.

Bài 10:

a) Số cách chọn 1 tổ 6 người bất kì là: C_{14}^6 .

Số cách chọn 1 tổ 6 người nam là: C_8^6 và 6 người nữ là: C_6^6

Vậy có: $C_{16}^4 - (C_8^6 + C_6^6) = 2974$ cách.

b) Số cách chọn 6 người không có A, B là: C_{12}^6 .

Để chọn 1 tổ trưởng thì có 6 cách nên có: $6C_{12}^6$ cách, 5 tổ viên không có A, B.

Số cách chọn tổ gồm 6 người, trong đó có A là C_{12}^5 , sau đó chọn tổ trưởng có 6 cách, tương tự cho trường hợp có B.

Vậy có tất cả: $6[C_{12}^6 + 2C_{12}^5] = 15048$ cách.

Bài 11:

Xét $x = \overline{a_1 \dots a_{10}}$ kể cả trường hợp $a_1 = 0$ thì có C_{10}^3 cách chọn vị trí số 6 và $P_7 = 7!$ cách xếp các số còn lại, do đó có $7!C_{10}^3 = 604.800$ số

Xét $x = \overline{0a_2 \dots a_{10}}$: có $C_9^3 \times P_6 = 6!C_9^3 = 60480$ số

Vậy có: $604.800 - 60480 = 544320$ số

2. Nhị thức Newton

A. Tóm tắt lý thuyết

+ Một số tính chất của tổ hợp:

a) $C_n^p = C_n^{n-p}$

b) $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$

c) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$

+ Công thức Newton

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n$$

$$\text{Hoặc } (a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

B. Bài tập tự luyện:

Bài 1: Giải phương trình: $C_{x+2}^4 = C_{x+2}^3$ với $x \in N$

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $x+2 \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Phương trình tương đương: $\frac{(x+2)!}{4!(x-2)!} = \frac{(x+2)!}{3!(x-1)!} \Rightarrow x = 5$.

Bài 2: Giải phương trình:

$$\frac{1}{2}A_{2x}^2 - A_x^2 \leq \frac{6}{x}C_x^3 + 10 \quad (*).$$

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $x \in N, x \geq 3$.

$$(*) \Leftrightarrow \frac{2x-1}{2} - (x-1)x \leq \frac{6(x-2)(x-1)x}{3!x} + 10$$

$$\Leftrightarrow 3 \leq x \leq 4 \Rightarrow x = 3 \vee x = 4.$$

Bài 3: Tìm $k \in N$ thoả $C_{14}^k + C_{14}^{k+2} = 2C_{14}^{k+1}$ (*).

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $0 \leq k \leq 12$ ($k \in N$).

$$(*) \Leftrightarrow \frac{14!}{k!(4-k)!} + \frac{14!}{(k+2)!(12-k)!} = 2 \cdot \frac{14!}{(k+1)!(13-k)!}$$

$$k^2 - 12k + 32 = 0 \Leftrightarrow k = 4 \vee k = 8.$$

Bài 4: Tìm $x \in N$ thoả: $C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x$ (*).

Hướng dẫn giải:

Điều kiện $x \geq 3$.

$$(*) \Leftrightarrow x + 3x^2 - 3x + x^3 - 3x^2 + 2x = 9x^2 - 14x$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 9x + 14) = 0 \Rightarrow x = 7.$$

Bài 5: Giải hệ $\begin{cases} 2A_x^y + 5C_x^y = 90 \\ 5A_x^y - 2C_x^y = 80 \end{cases}$ (*)

Hướng dẫn giải:

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} A_x^y = 20 \\ C_x^y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$$

Bài 6: Tìm $x \in \mathbb{N}$ thỏa: $A_x^{10} + A_x^9 = 9A_x^8$.

Hướng dẫn giải:

Điều kiện $x \geq 10, x \in \mathbb{N}$.

Phương trình trở thành: $x^2 - 16x + 55 = 0 \Rightarrow x = 11$.

Bài 7: Tìm số $n \in \mathbb{N}$ thỏa $\frac{A_n^4}{A_{n+1}^3 - C_n^{n-4}} = \frac{24}{33}$.

Hướng dẫn giải:

Điều kiện $n \geq 4$.

Phương trình tương đương: $\frac{23n!}{(n-4)!} = 24 \left[\frac{(n+1)!}{(n-2)!} - \frac{n!}{(n-4)!4!} \right]$

$$\Leftrightarrow n^2 - 6n + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ n = 5 \end{cases}$$

Vậy $n = 5$.

Bài 8: Cho biết tổng tất cả các hệ số của khai triển: $(x^2 + 1)^n$ bằng 1024. Hãy tìm hệ số a của $a \cdot x^{12}$ trong khai triển trên:

Hướng dẫn giải:

Ta có $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n = 1024 \Rightarrow n = 10$.

Do đó: $(x^2 + 1)^{10} = C_{10}^0 + C_{10}^1 x^2 + C_{10}^2 x^4 + \dots + C_{10}^6 x^{12} + \dots + C_{10}^{10} x^{20}$.

Vậy $a = C_{10}^6 = 210$.

Bài 9: Tính hệ số của x^{31} trong khai triển $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{40}$.

Hướng dẫn giải:

Số hạng tổng quát của khai triển là:

$$C_{40}^k x^{40-k} \left(\frac{1}{x^2}\right)^k = C_{40}^k x^{40-3k}$$

Số hạng chứa x^{31} ta có: $40 - 3k = 31 \Leftrightarrow k = 3$.

Do đó số hạng đó là: $C_{40}^3 = 9980$.

Bài 10: Trong khai triển $P(x) = (1 + 2x)^{12}$ thành dạng đa thức. Tìm hệ số lớn nhất của khai triển

Hướng dẫn giải:

Gọi a_k là hệ số lớn nhất của khai triển, ta có:

$$\begin{cases} a_k > a_{k-1} \Leftrightarrow 2^k C_{12}^k > 2^{k-1} C_{12}^{k-1} \\ a_k > a_{k+1} \Leftrightarrow 2^k C_{12}^k > 2^{k+1} C_{12}^{k+1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{k} \geq \frac{1}{12-k+1} \\ \frac{1}{12-k} \geq \frac{2}{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{23}{3} \leq k \leq \frac{25}{3} \Rightarrow k = 8.$$

Do đó hệ số lớn nhất là: $a_8 = 2^8 C_{12}^8$.

Bài 11: Trong khai triển: $\left(x\sqrt[3]{x} + x^{-\frac{28}{15}}\right)^n$. Hãy tìm số hạng không chứa x

biết rằng: $C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79$ (*).

Hướng dẫn giải:

Từ (*) ta có: $1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 79 \Rightarrow n = 12$.

Số hạng thứ k của khai triển: $C_{12}^k x^{\frac{4}{3}(12-k)} \cdot x^{-\frac{28}{15}k}$.

Để không phụ thuộc vào x , ta phải có:

$$\frac{4}{3}(12-k) - \frac{28}{15}k = 0 \Leftrightarrow k = 5.$$

Vậy hệ số của số hạng không chứa x là: $C_{12}^5 = 792$.

Bài 12: Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất của $f(x) = C_{x+1}^{2x-8}$.

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $x+1 \in \mathbb{N}, 2x-8 \in \mathbb{N}; 2x-8 \leq x+1 \Rightarrow D_f = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

$$f(x) = \frac{(x+1)!}{(2x-8)!(9-x)!}$$

$$f(x) = 1; f(5) = 15; f(6) = 35; f(7) = 28; f(8) = 9.$$

Do đó $\text{Max} f(x) = 28, \text{min} f(x) = 1$.

Bài 13: Tìm số hạng lớn nhất Trong khai triển $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right)^{10}$

Hướng dẫn giải:

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right)^{10} = \frac{1}{3^{10}} \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (2x)^k = \frac{2^k}{3^{10}} \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k x^k$$

$$\text{Do đó: } a_k = \frac{2^k}{3^{10}} C_{10}^k$$

$$a_k \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow \begin{cases} a_k \geq a_{k-1} \\ a_k \geq a_{k+1} \end{cases} \Rightarrow \frac{19}{3} \leq k \leq \frac{22}{3} \Rightarrow k = 7$$

$$\text{Do đó số hạng lớn nhất là: } a_7 = \frac{2^7}{3^{10}} C_{10}^7.$$

Bài 14: Tìm số hạng của khai triển $(\sqrt{3} + \sqrt[3]{2})^9$ là 1 số nguyên.

Hướng dẫn giải:

Số hạng tổng quát của khai triển là:

$$a_k = C_9^k (\sqrt{3})^{9-k} (\sqrt[3]{2})^k = C_9^k \cdot 3^{\frac{9-k}{2}} \cdot 2^{\frac{k}{3}}.$$

Số hạng a_k là số nguyên khi và chỉ khi $\frac{9-k}{2}$ và $\frac{k}{3}$ là các số nguyên tức

là: $k = 3$ và $k = 9$.

Vậy: Có 2 số hạng của khai triển là số nguyên:

$$a_3 = C_9^3 \cdot 3^3 \cdot 2 = 4536$$

$$a_9 = C_9^9 \cdot 2^3 = 8.$$

Bài 15: Tính tổng: $S = 1 + 4C_n^1 + 4^2 C_n^2 + \dots + 4^{n-1} C_n^{n-1} + 4^n$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } (1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n$$

$$\text{Chọn } x = 4, \text{ ta có: } 5^n = 1 + 4C_n^1 + 4^2 C_n^2 + \dots + 4^{n-1} C_n^{n-1} + 4^n C_n^n$$

$$\Leftrightarrow 1 + 4C_n^1 + 4^2 C_n^2 + \dots + 4^{n-1} C_n^{n-1} + 4^n C_n^n$$

$$\Leftrightarrow 1 + 4C_n^1 + 4^2 C_n^2 + \dots + 4^{n-1} C_n^{n-1} + 4^n = 5^n$$

Bài 16: Tính $S = C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - 4C_n^4 + \dots + (-1)^{n-1} n C_n^{n-1}$.

Hướng dẫn giải:

Xét $f(x) = (1-x)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k x^k$.

Ta có: $f'(x) = -n(1-x)^{n-1} = -\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cdot k \cdot C_n^k x^{k-1}$

Cho $x = 1 \Rightarrow 0 = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k \cdot C_n^k$.

Vậy $S = 0$.

Bài 17: Tính tổng: $S = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 2 + \frac{1}{3}C_n^2 2^2 + \frac{1}{4}C_n^3 2^3 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n 2^n$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$

$\Rightarrow \int_0^2 (1+x)^n dx = \int_0^2 \sum_{k=0}^n C_n^k x^k dx$

$\Leftrightarrow \left. \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} \right|_0^2 = \left[C_n^0 x + \frac{1}{2}C_n^1 x^2 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n x^{n+1} \right]_0^2$

$\Leftrightarrow \frac{3^{n+1} - 1}{2(n+1)} = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 2 + \frac{1}{3}C_n^2 2^2 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n 2^n$

Vậy $S = \frac{3^{n+1} - 1}{2(n+1)}$.

Bài 18: Chứng minh: $C_n^1 3^{n-1} + 2C_n^2 3^{n-2} + \dots + nC_n^n = n \cdot 4^{n-1}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $(3+x)^n = C_n^0 3^n + C_n^1 3^{n-1}x + C_n^2 3^{n-2}x^2 + \dots + C_n^n x^n$.

Đạo hàm 2 vế:

$n(3+x)^{n-1} = C_n^1 3^{n-1} + 2C_n^2 3^{n-2}x + 3C_n^3 3^{n-3}x^2 + \dots + nC_n^n x^{n-1}$.

Cho $x = 1$ ta có:

$n4^{n-1} = C_n^1 3^{n-1} + 2C_n^2 3^{n-2} + 3C_n^3 3^{n-3} + \dots + nC_n^n$, đpcm.

Bài 19: Chứng minh: $C_{2001}^k + C_{2001}^{k+1} \leq C_{2001}^{1000} + C_{2001}^{1001}$ với $0 \leq k \leq 2000, k \in \mathbb{N}$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $C_{2001}^k + C_{2001}^{k+1} = C_{2002}^{k+1}$ và $C_{2001}^{1000} + C_{2001}^{1001} = C_{2002}^{1001}$.

Do đó bất đẳng thức trở thành: $C_{2002}^{k+1} \leq C_{2002}^{1001}$.

Vì $C_{2002}^k = C_{2002}^{2002-k}$ nên ta chứng minh bất đẳng thức khi $0 \leq k \leq 1000$.

Xét dãy $a_k = C_{2002}^{k+1}$. Ta chứng minh C_{2002}^{1001} là số hạng lớn nhất.

Gọi C_{2002}^e là số hạng lớn nhất ta phải có:

$$\begin{cases} C_{2002}^e > C_{2002}^{e-1} \\ C_{2002}^e > C_{2002}^{e+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{e} > \frac{1}{2003-e} \\ \frac{1}{e+1} > \frac{1}{2002-e} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2002}{2} \leq e \leq \frac{2003}{2} \Leftrightarrow e = 1001.$$

Vậy: C_{2002}^{1001} là số hạng lớn nhất.

Do đó: $C_{2002}^{k+1} < C_{2002}^{1001}$.

Bài 20: Chứng minh: $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n} = 2^{2n-1}$.

Hướng dẫn giải:

$$(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + \dots + C_{2n}^{2n} x^{2n}$$

$$\text{Ta có: } (1-x)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 - \dots + C_{2n}^{2n} x^{2n}.$$

$$\text{Với } x=1 \Rightarrow 2^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n}.$$

$$0 = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - \dots + C_{2n}^{2n}.$$

$$\text{Cộng lại ta được: } 2^{2n} = 2[C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \dots + C_{2n}^{2n}]$$

$$\text{Do đó } 2^{2n-1} = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \dots + C_{2n}^{2n}, \text{ đpcm.}$$

Bài 21: Chứng minh: $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 3^2 + C_{2n}^4 3^4 + \dots + C_{2n}^{2n} 3^{2n} = 2^{2n-1} (2^{2n} + 1)$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } (1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k x^k$$

$$(1-x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k C_{2n}^k x^k.$$

$$\text{Cộng lại ta có: } (1+x)^{2n} + (1-x)^{2n} = 2[C_{2n}^0 + C_{2n}^2 x^2 + \dots + C_{2n}^{2n} x^{2n}]$$

$$\text{Cho } x=3 \Rightarrow 4^{2n} + 2^{2n} = 2[C_{2n}^0 + C_{2n}^2 3^2 + \dots + C_{2n}^{2n} 3^{2n}]$$

$$\Leftrightarrow C_{2n}^0 + C_{2n}^2 3 + C_{2n}^4 3^2 + \dots + C_{2n}^{2n} 3^n = 2^{2n-1} [2^{2n} + 1], \text{ đpcm.}$$

Bài 22:

a) Tính $I = \int_0^1 x(1-x^2)^n dx, (n \in \mathbb{N})$.

b) Chứng minh: $\frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 - \frac{1}{8}C_n^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{2(n+1)}C_n^n = \frac{1}{2(n+1)}.$

Hướng dẫn giải:

a) $I = -\frac{1}{2} \int_0^1 (1-x^2)^n d(1-x^2) = -\frac{1}{2(n+1)} (1-x^2)^{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{2(n+1)}.$

b) $(1-x^2)^n = C_n^0 - C_n^1 x^2 + C_n^2 x^4 - C_n^3 x^6 + \dots + (-1)^n C_n^n x^{2n}.$

Do đó:

$$I = \int_0^1 x [C_n^0 - C_n^1 x^2 + C_n^2 x^4 - C_n^3 x^6 + \dots + (-1)^n C_n^n x^{2n}] dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} C_n^0 x^2 - \frac{1}{4} C_n^1 x^4 + \frac{1}{6} C_n^2 x^6 - \frac{1}{8} C_n^3 x^8 + \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+2} C_n^n x^{2n+2} \right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{1}{2} C_n^0 - \frac{1}{4} C_n^1 + \frac{1}{6} C_n^2 - \frac{1}{8} C_n^3 + \dots + (-1)^n \frac{1}{2(n+1)} C_n^n.$$

So sánh ta có: $\frac{1}{2} C_n^0 - \frac{1}{4} C_n^1 + \frac{1}{6} C_n^2 - \frac{1}{8} C_n^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{2(n+1)} C_n^n = \frac{1}{2(n+1)}.$

C. Bài tập tự luyện:

Bài 1: Tìm hệ số của x^5 trong khai triển:

$$f(x) = (2x+1)^4 + (2x+1)^5 + (2x+1)^6 + (2x+1)^7 \text{ thành đa thức.}$$

Bài 2: Viết khai triển $(3x-1)^{16}$ từ đó chứng minh:

$$3^{16} C_{16}^0 - 3^{15} C_{16}^1 + 3^{14} C_{16}^2 - \dots + C_{16}^{16} = 2^{16}.$$

Bài 3: Cho $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh C_n^k lớn nhất nếu k là số tự nhiên lớn nhất

không vượt quá $\frac{n+1}{2}.$

Bài 4: Tìm hệ số của x^4 trong khai triển: $\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right)^{12}$.

Bài 5: Chứng minh: $(C_n^{(0)})^2 + (C_n^{(1)})^2 + \dots + (C_n^{(n)})^2 = C_{2n}^{(n)}$.

Bài 6: Chứng minh: $C_n^{(0)}C_m^{(p)} + C_n^{(1)}C_m^{(p-1)} + C_n^{(2)}C_m^{(p-2)} + \dots + C_n^{(m)}C_m^{(0)} = C_{m+n}^{(p)}$.

Bài 7: Chứng minh: $1C_n^{(1)} - 2C_n^{(2)} + 3C_n^{(3)} - \dots + (-1)^{n-1}nC_n^{(n)} = 0$.

Bài 8: Chứng minh: $C_n^{(0)} + \frac{1}{2}C_n^{(1)} + \frac{1}{3}C_n^{(2)} + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^{(n)} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$.

Bài 9:

a) Tính $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$.

b) Tính: $1 - \frac{C_n^{(1)}}{3} + \frac{C_n^{(2)}}{5} - \frac{C_n^{(3)}}{7} + \dots + \frac{(-1)^n C_n^{(n)}}{2n+1} = \frac{24 \dots 2n}{1.3 \dots (2n+1)}$.

Bài 10: Tìm số hạng không chứa x của khai triển:

$$P(x) = \left(2 + x + \frac{5}{x}\right)^8.$$

D. Hướng dẫn – Đáp số

Bài 1: Hệ số của x^5 là: $a = C_5^5 2^5 + C_6^5 2^5 + C_7^5 2^5 = 896$.

Bài 2: $(3x - x)^{16} = \sum_{k=0}^{16} C_{16}^k (3x)^{16-k} (-1)^k$

Chọn $k = 1 \Rightarrow$ đpcm.

Bài 3: C_n^k lớn nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} C_n^k \geq C_n^{k+1} \\ C_n^k \geq C_n^{k-1} \end{cases}$

Giải hệ ta được $\frac{n-1}{2} \leq k \leq \frac{n+1}{2} \Rightarrow$ đpcm.

Bài 4: Đáp số $a = \frac{55}{9}$.

Bài 5: Đề ý: $(1+x)^{2n} = (1+x)^n (1+x)^n$.

Khai triển $(1+x)^{2n}$ ta có hệ số của x^n là C_{2n}^n .

Hệ số của x^n trong tích số $(1+x)^n(1+x)^n$ là:

$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2$. So sánh ta có đpcm.

Bài 6: Đề ý: $(1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{m+n}$. Đồng nhất hệ số x^n ở 2 vế.

Bài 7: Đạo hàm hai vế của: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$, cho $x = -1$.

Bài 8: Đề ý: $\int_0^x (1+t)^n dt = \frac{1}{n+1} (1+t)^{n+1} \Big|_0^x = \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{n+1}$

Bài 9:

a) Đặt $x = \sin t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$)

$$I_{n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1}.$$

b) Khai triển $(1-x^2)^n$ rồi tính tích phân hai vế.

Bài 10:

$$P(x) = \left[2 + \left(x + \frac{5}{x} \right) \right]^8 = C_8^0 2^8 + C_8^1 2^7 \left(x + \frac{5}{x} \right) + C_8^2 2^6 \left(x + \frac{5}{x} \right)^2 + \dots + C_8^8 \left(x + \frac{5}{x} \right)^8.$$

$$\text{Đề ý: } \left(x + \frac{5}{x} \right)^k = C_k^0 x^k + C_k^1 x^{k-1} \cdot \frac{5}{x} + C_k^2 x^{k-2} \cdot \frac{5^2}{x^2} + \dots + C_k^k \cdot \frac{5^k}{x^k} \quad (1)$$

Vế phải của (1) không chứa x khi $k - 2m = 0$

$$\Leftrightarrow k = 2m \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Hệ số của các số hạng này là: $C_{2m}^m 5^m$.

Do đó: Số hạng không chứa x của $P(x)$ là:

$$A = 2^8 + C_8^2 2^6 C_2^1 + C_8^4 2^4 5^2 C_4^2 + C_8^6 2^2 5^3 C_6^3 + 5^4 C_8^4.$$

§3 Vấn đề 3: Trắc nghiệm về Hoán vị – Chính hợp – Tổ hợp

- Câu 1.** Có 4 con đường nối từ thành phố A đến thành phố B và có 3 con đường nối từ thành phố B đến thành phố C. Một người muốn đi từ A đến C, phải qua B, rồi từ C về lại A (qua B) mà không đi lại đường cũ đã chọn thì số cách chọn lộ trình khác nhau là:
A. 72 B. 144 C. 18 D. 14.
- Câu 2.** Số các số tự nhiên gồm 4 chữ số mà 2 chữ số đứng kề nhau phải khác nhau là:
A. 4536 B. 9000 C. 6561 D. 10000.
- Câu 3.** Cho $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, số cặp (x, y) với $x \in X, y \in X$ và $x > y$ là:
A. 72 B. 36 C. 17 D. 48.
- Câu 4.** Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ số cặp có thứ tự (x, y) mà $x \in A, y \in A$, $x + y = 8$ là:
A. 12 B. 6 C. 10 D. 5.
- Câu 5.** Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, có bao nhiêu bộ có thứ tự (x, y, z) với $x, y, z \in A, x > y$ và z là số chẵn
A. 72 B. 144 C. 252 D. 36.
- Câu 6.** Với các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số lẻ có 4 chữ số khác nhau?
A. 72 B. 48 C. 36 D. 24.
- Câu 7.** Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số chẵn có 4 chữ số khác nhau?
A. 144 B. 72 C. 156 D. 120.
- Câu 8.** Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số trong đó các chữ số cách đều số đứng ở giữa thì giống nhau?
A. 500 B. 400 C. 900 D. 1000.
- Câu 9.** Cho $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ với n là số tự nhiên lớn hơn 1. Có bao nhiêu cặp số thứ tự (x, y) với $x, y \in X, x > y$.

- Câu 10.** Với các chữ số 2, 3, 5, 8 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số chia hết cho 4?
 A. 2 B. 4 C. 6 D. 10.
- Câu 11.** Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau và lớn hơn 300000?
 A. 360 B. 720 C. 240 D. 120.
- Câu 12.** Có bao nhiêu cách xếp 6 học sinh vào ngồi thành một dãy gồm 6 ghế?
 A. 120 B. 360 C. 720 D. 36
- Câu 13.** Có bao nhiêu cách xếp 5 học sinh vào ngồi 5 ghế quanh một bàn tròn (không có sự phân biệt giữa các ghế)?
 A. $5!$ B. $4!$ C. $\frac{1}{2}5!$ D. $5!4!$.
- Câu 14.** Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau biết rằng tổng của 3 chữ số bằng 12?
 A. 60 B. 72 C. 54 D. 45.
- Câu 15.** Cho 5 quả cầu màu trắng có bán kính khác nhau và 5 quả cầu màu xanh có bán kính khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chúng thành 1 dãy sao cho 2 quả cầu cùng màu không đứng cùng nhau?
 A. $2 \cdot 5!$ B. $5! \cdot 4!$ C. $2(5!)^2$ D. $2((n-1)^2!)$.
- Câu 16.** Một dãy gồm 5 ghế dành cho 3 nam và 2 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách xếp để nam ngồi kề nhau và nữ ngồi kề nhau?
 A. 12 B. 24 C. 36 D. 48
- Câu 17.** Một phòng khách có 3 vị trí để trang trí: tranh, ảnh và tượng. Chủ nhà muốn xếp 4 bức tranh 3 bức ảnh và 2 pho tượng mỗi loại ở mỗi vị trí. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp?
 A. 288 B. 864 C. 1728 D. 3456.
- Câu 18.** Từ các chữ số 0, 1, 3, 6, 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau và số đó chia hết cho 3?
 A. 9 B. 12 C. 15 D. 18.
- Câu 19.** Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau trong đó phải có chữ số 1?
 A. 96 B. 120 C. 196 D. 204.

- Câu 20.** Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau biết rằng số đó chia hết cho 5?
- A. 28560 B. 15120 C. 13440 D. 28126.
- Câu 21.** Số giao điểm tối đa của 10 đường thẳng và 10 đường tròn là:
- A. 135 B. 200 C. 335 D. 155.
- Câu 22.** Một đa giác lồi có 7 cạnh, giả sử 3 đường chéo không cùng đi qua 1 đỉnh thì không đồng quy. Số giao điểm của các đường chéo là:
- A. 210 B. 240 C. 245 D. 35.
- Câu 23.** Một đa giác lồi có 20 đường chéo thì số cạnh của đa giác là:
- A. 10 B. 9 C. 8 D. 7.
- Câu 24.** Cho 2 đường thẳng song song d_1, d_2 . Trên (d_1) có 10 điểm $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ và trên (d_2) có 15 điểm $B_1, B_2, \dots, B_{15}$. Hỏi có bao nhiêu tam giác có đỉnh là các điểm A_i, B_j trên:
- A. 1725 B. 150 C. 2050 D. 225.
- Câu 25.** Trên mỗi mặt của hình lập phương vẽ 1 đường tròn. Trên đường tròn lấy n điểm. Nối các điểm này lại thì có bao nhiêu đường thẳng không nằm trong mặt nào của hình lập phương?
- A. n^2 B. $6n^2$ C. $10n^2$ D. $15n^2$.
- Câu 26.** Một tổ trực gồm 8 nam sinh và 6 nữ sinh. Để chọn 5 học sinh đi trực thì có bao nhiêu cách nếu trong số học sinh được chọn phải có ít nhất 1 nữ sinh?
- A. 2002 B. 1946 C. 2058 D. 1876
- Câu 27.** Cho $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 4 chữ số khác nhau của A và số đó nhỏ hơn 7000?
- A. 144 B. 160 C. 120 D. 112.
- Câu 28.** Cho ΔABC , xét tập hợp gồm 4 đường thẳng song song với AB , 5 đường thẳng song với BC và 6 đường thẳng song song với CA . Các đường thẳng này cắt nhau tạo thành bao nhiêu tam giác?
- A. 120 B. 455 C. 720 D. 360.
- Câu 29.** Có 5 tem thư khác nhau và có 6 bì thư khác nhau. Người ta chọn ra 3 tem thư và 3 bì thư, mỗi bì thư dán một tem thư. Hỏi có bao nhiêu cách dán mỗi tem thư vào một phong bì thư?
- A. 600 B. 900 C. 1200 D. 1500.

Câu 30. Một dãy gồm 8 ghế, để xếp 5 người khách gồm 3 nam và 2 nữ vào ngồi thì có bao nhiêu cách nếu họ ngồi kề nhau theo nhóm nam và nữ?

- A. 120 B. 56 C. 96 D. 480.

Câu 31. Trong một hội nghị mọi người đều bắt tay nhau, người ta đếm được có 1225 cái bắt tay. Hãy cho biết số người dự hội nghị?

- A. 50 B. 45 C. 55 D. 65.

Câu 32. Mỗi bảng số xe máy gồm 2 phần. Phần chữ gồm 2 chữ cái khác nhau trong 26 chữ cái. Phần số có 3 chữ số khác nhau. Hỏi có bao nhiêu bảng số xe như thế?

- A. $A_{26}^2 \cdot A_9^3$ B. $A_{26}^2 \cdot A_{10}^3$ C. $26^2 \cdot 10^3$ D. 338000.

Câu 33. Trong buổi tham quan của 1 nhóm học sinh thì cứ 2 học sinh chụp 1 ảnh. Số ảnh đã chụp là 36 cái. Hỏi có bao nhiêu học sinh tham dự?

- A. 6 B. 8 C. 9 D. 12.

Câu 34. Một đoàn tàu có 6 toa để xếp 6 người lên tàu thì có bao nhiêu cách.

- A. 6! B. 6^6 C. 6. 6! D. 5. 6!.

HƯỚNG DẪN GIẢI TRẮC NGHIỆM HOÁN VỊ CHỈNH HỢP – TỔ HỢP

Câu 1. Để đi từ A đến C (qua B) thì có $4 \times 3 = 12$ cách chọn.

Để đi từ C về A (qua B) mà không dùng lại đường cũ thì có $3 \times 2 = 6$ cách. Vậy có $12 \times 6 = 72$ cách khác nhau. Chọn câu A.

Câu 2. Gọi $x = \overline{abcd}$ là số có 4 chữ số.

Để chọn a thì có 9 cách (khác 0); để chọn $b \neq a$ thì có 9 cách; để chọn $c \neq b$ thì có 9 cách; để chọn $d \neq c$ thì có 9 cách. Do đó có tất cả $9^4 = 6561$ cách. Chọn câu C.

Câu 3. Để chọn $x \in X$ thì có 9 cách. Để chọn $y \in Y$, $x \neq y$ thì có 8 cách. Do đó có $9 \times 8 = 72$ cặp (x, y) mà $x \neq y$. Trong đó số cặp có $x > y$ và số cặp $x < y$ bằng nhau nên mỗi loại là: $72/2 = 36$ cặp. Chọn câu E.

Câu 4. $y \in A \Rightarrow y \leq 6, x + y = 8 \Rightarrow x \geq 2$. Có 5 cách chọn x với mỗi số x đã chọn thì có duy nhất $y = 8 - x$ thỏa điều kiện $x + y = 8$. Vậy có 5 cặp (x, y) . Chọn câu D.

Câu 5. Có 4 cách chọn phần tử z ; có 9 cách chọn phần tử x và có 8 cách chọn phần tử y ($y \neq x$). Do đó số cặp (x, y) với $x > y$ là: $\frac{9 \times 8}{2} = 36$. Vậy có $36 \times 4 = 144$ bộ (x, y, z) thỏa điều kiện bài toán. Chọn câu B.

Câu 6. Gọi $x = \overline{abcd}$ là số gồm 4 chữ số, x lẻ nên có 3 cách chọn d , các chữ số còn lại lần lượt có 4, 3, 2 cách chọn. Vậy có tất cả $3 \times 4 \times 3 \times 2 = 72$ số. Chọn câu A.

Câu 7. Gọi $x = \overline{abcd}$ là số gồm 4 chữ số, x chẵn nên d có 3 cách chọn $d \in \{0, 2, 4\}$.

Nếu $d = 0$ thì a, b, c lần lượt có 5, 4, 3 cách chọn. Vậy có $5 \times 4 \times 3 = 60$ số

Nếu $d = 2$ hoặc $d = 4$ Có 2 cách chọn d , thì a có 4 cách chọn; b và c lần lượt có 4, 3 cách chọn. Vậy có $2 \times 4 \times 4 \times 3 = 96$ số

Do đó có tất cả $60 + 96 = 156$ số. Chọn câu C.

Câu 8. Gọi $x = \overline{abcba}$ là số cần tìm. Để chọn a thì có 9 cách chọn (a khác 0). Để chọn b và c đều có 10 cách chọn. Vậy có tất cả $9 \times 10 \times 10 = 900$ số. Chọn câu C.

Câu 9. Để chọn $x \in X$ thì có n cách. Để chọn $y \neq x, y \in X$ thì có $(n - 1)$ cách. Do đó có $n(n - 1)$ cách chọn (x, y) trong đó số cặp có $x > y$ và $x < y$ bằng nhau. Vậy có $\frac{n(n - 1)}{2}$ cặp (x, y) mà $x > y$. Chọn câu D.

Câu 10. Gọi $x = \overline{abcd}$ là số có 4 chữ số khác nhau, x chia hết cho 4 nên $\overline{cd}$ phải chia hết cho 4, do đó có 3 cách chọn cặp thứ tự (c, d) các chữ số 28, 32, 52). Các chữ số a, b lần lượt có 2, 1 cách chọn. Vậy có tất cả $3 \times 2 \times 1 = 6$ số. Chọn câu C.

Câu 11. Gọi $x = \overline{a_1 a_2 \dots a_6}$ là số gồm 6 chữ số khác nhau. $x > 300000$ nên có 3 cách chọn a_1 . Sau đó các chữ số còn lại lần lượt có 5, 4, 3, 2, 1 cách chọn. Vậy có $3 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 360$ số. Chọn câu B.

Câu 12. Có $P_6 = 6!$ cách xếp 6 học sinh ngồi thành 1 dãy gồm 6 ghế. Chọn câu C.

Câu 13. Chọn 1 người vào ngồi 1 ghế bất kì sau đó xếp 4 người còn lại vào 4 ghế thì có $P_4 = 4!$ cách xếp. Chọn câu B.

Câu 14. Ba số tự nhiên khác nhau nhỏ hơn hoặc bằng 9. Có tổng bằng 12 là: phần tử của các tập hợp sau:

$\{0, 3, 9\}, \{0, 4, 8\}, \{0, 5, 7\}, \{1, 2, 9\}, \{1, 3, 8\}, \{1, 4, 7\}, \{1, 5, 6\}, \{2, 3, 7\}, \{2, 4, 6\}, \{3, 4, 5\}.$

Đối với mỗi tập hợp có chứa số 0 thì có $2 \times 2! = 4$ số.

Đối với mỗi tập hợp không chứa số 0 thì có $3! = 6$ số.

Do đó có $3 \times 4 + 7 \times 6 = 54$ số. Chọn câu C.

Câu 15. Xếp 5 quả cầu trắng vào các vị trí lẻ thì có $5!$ cách. Xếp 5 quả cầu xanh vào các vị trí chẵn thì có $5!$ cách. Hoán đổi vị trí của 2 loại quả cầu. Do đó có $2(5!)^2$ cách. Chọn câu C.

Câu 16. Xếp 3 nam vào ngồi liên tiếp ở 3 ghế bên trái thì có $3!$ cách. Xếp 2 nữ còn lại thì có $2!$ cách. Lập luận tương tự cho cách xếp ngược lại. Vậy có tất cả $2 \times 3! \times 2! = 24$ cách. Chọn câu B.

Câu 17. Chọn vị trí để xếp mỗi loại thì có $3!$ cách. Xếp tranh thì có $4!$ cách. Xếp ảnh thì có $3!$ cách. Xếp tượng thì có $2!$ cách. Vậy có tất cả $3! \times 4! \times 3! \times 2! = 1728$ cách. Chọn câu C.

Câu 18. Vì các chữ số 0, 3, 6, 9 đều chia hết cho 3. Do đó để $x = \overline{abcb a}$ chia hết cho 3 thì a, b, c, d phải khác 1. Để chọn a thì có 3 cách (khác 0); để chọn 3 chữ số còn lại thì có $P_3 = 3!$ cách chọn. Vậy có $3 \times 3! = 18$ cách. Chọn câu D.

Câu 19. $x = \overline{abcd}$ là số cần tìm.

*. x là số gồm có 4 chữ số bất kì. Để chọn a thì có 5 cách chọn. Để chọn 3 số còn lại thì có A_5^3 cách chọn. Vậy có $5 \times A_5^3 = 300$ số gồm 4 chữ số.

*. x là số gồm 4 chữ số không chứa số 1. Để chọn a thì có 4 cách. Để chọn 3 chữ số còn lại thì có A_4^3 cách. Vậy có $4 \times A_4^3 = 96$ số.

Do đó số các số gồm 4 chữ số khác nhau và không chứa số 1 là:

$300 - 96 = 204$ số. Chọn câu D.

Câu 20. Gọi $x = \overline{a_1 a_2 \dots a_6}$ là số phải tìm, x chia hết cho 5 nên $a_6 = 0$ hoặc $a_6 = 5$.

*. $a_6 = 0$. Có A_9^5 cách chọn các chữ số còn lại.

*. $a_6 = 5$. Có 8 cách chọn a_1 và có A_8^4 cách chọn 4 chữ số còn lại.

Do đó có tất cả: $A_9^5 + 8 \times A_8^4 = 28560$ số. Chọn câu A.

Câu 21. Giao điểm tối đa của 10 đường thẳng là: $C_{10}^2 = 45$ điểm. Giao điểm tối đa của 10 đường tròn là: $2 \times C_{10}^2 = 90$ điểm. Một đường thẳng cắt 1 đường tròn tối đa 2 điểm nên số giao điểm tối đa của đường thẳng và đường tròn là: $10 \times 2 = 200$ điểm. Do đó có tất cả $45 + 90 + 200 = 335$ điểm. Chọn câu C.

Câu 22. Số giao điểm 2 đường chéo ứng với số tứ giác lồi có 4 đỉnh là 4 đỉnh của đa giác. Do đó số giao điểm của các đường chéo là:

$$C_7^4 = \frac{7!}{4 \times 3} = 35. \text{ Chọn câu D.}$$

Câu 23. Gọi n là số cạnh của đa giác, số đường chéo của đa giác là:

$$C_n^2 - n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Giải phương trình $\frac{n(n-3)}{2} = 20 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 40 = 0 \Rightarrow n = 8$ và $n = -5$.

Chọn $n = 8$. Chọn câu C.

Câu 24. Số tam giác có cạnh trên d_2 và đỉnh trên d_1 là: $10 \times C_{15}^2$ và số tam giác có cạnh trên d_1 và đỉnh trên d_2 là: $15 \times C_{10}^2$. Do đó có tất cả: $10 \times C_{15}^2 + 15 \times C_{10}^2 = 1725$. Chọn câu A.

Câu 25. Chọn 2 mặt trong 6 mặt của lập phương thì có C_6^2 cách. Nối 1 điểm của mặt này và 1 điểm của mặt kia thì có n^2 đường thẳng. Vậy có $n^2 \times C_6^2 = 15n^2$ đường thẳng nối các điểm trên. Chọn câu C.

Câu 26. Chọn 5 học sinh bất kì trong 14 học sinh thì có $C_{14}^5 = 2002$ cách. Cho 5 học sinh đều là: nam thì có $C_8^5 = 56$ cách. Do đó số cách chọn 5 học sinh trong đó có ít nhất 1 nữ là: $2002 - 56 = 1946$ cách. Chọn câu B.

Câu 27. $x = \overline{abcd}$ là số cần tìm. Nếu $d = 8$ thì có 4 cách chọn a và có A_4^2 cách chọn hai chữ số b, c . Vậy có: $4 \times A_4^2 = 48$ số.

Nếu $d \neq 8$ thì có 2 cách chọn d, 3 cách chọn a và A_4^2 cách chọn b, c. Vậy có $2 \times 3 \times A_4^2 = 72$ số.

Do đó có tất cả $48 + 72 = 120$ số. Chọn câu C.

Câu 28. Một nhóm gồm 3 đường thẳng trong đó không có 2 đường thẳng cùng 1 họ thì tạo thành tam giác. Vậy có $C_4^1 C_5^1 C_6^1 = 120$ tam giác. Chọn câu A.

Câu 29. Chọn 3 bì thư trong 6 bì thư thì có C_6^3 cách. Chọn 3 tem thư trong 5 tem thư thì có C_5^3 cách dán 3 tem thư vào 3 bì thư thì có $P_3 = 3!$ cách.

Do đó có $C_6^3 \times C_5^3 \times 3! = 1200$ cách. Chọn câu C.

Câu 30. Chọn 5 ghế liên tiếp trong dãy gồm 8 ghế thì có 4 cách. Xếp 3 nam bên trái thì có $3!$ cách. Xếp 2 nữ bên phải thì có $2!$ cách. Hoán đổi vị trí nam và nữ. Do đó có $4 \times 3! \times 2! \times 2 = 96$ cách. Chọn câu C.

Câu 31. Gọi n là số người tham gia hội nghị ($n \geq 2$). Mỗi cái bắt tay ứng với việc chọn 2 người trong n người (không kể thứ tự) nên có C_n^2 cái bắt tay.

Giải: $C_n^2 = 1225 \Rightarrow n^2 - n - 2450 = 0 \Rightarrow n = 50$. Chọn câu A.

Câu 32. Chọn 2 chữ cái khác nhau thì có A_{26}^2 cách. Chọn 3 chữ số khác nhau thì có A_{10}^3 cách. Vậy có tất cả $A_{26}^2 \times A_{10}^3 = 468000$ cách. Chọn câu B.

Câu 33. Mỗi lần chụp 1 ảnh tương ứng với chọn 2 người trong số n người, do đó ta có $C_n^2 = 36 \Leftrightarrow n = 9$. Chọn câu C.

Câu 34. Dùng quy tắc đếm. Mỗi người đều có 6 cách xếp (vào 1 trong số 6 toa) nên có 6^6 cách xếp. Chọn câu B.

3.1. TRẮC NGHIỆM VỀ CÔNG THỨC NEWTON

Câu 1. Mệnh đề nào dưới đây là sai.

A. $C_n^k = C_n^{n-k}$

B. $C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$

C. $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$

D. $C_n^k + C_{n+1}^k = C_{n+1}^{k+1}$.

Câu 2. Cho biết $C_n^{12} = C_n^8$ thì giá trị của C_n^{17} là:

A. 1140

B. 680

C. 171

D. 1412

Câu 3. Nghiệm của phương trình $20C_n^5 = 3A_{n-2}^4$ là:

A. $n = 9$

B. $n = 9$ hay $n = 10$

C. $n = 12$

D. $n = 10$ hay $n = 12$.

Câu 4. Nghiệm của phương trình $A_n^2 \cdot C_{n-1}^{n-1} = 48$ là:

A. $n = 3$

B. $n = 4$

C. $n = 6$

D. $n = 7$.

Câu 5. Nghiệm của phương trình $C_x^1 + C_x^2 + C_x^3 = \frac{7}{2}x$ là:

A. $x = 4$

B. $x = 5$

C. $x = 6$

D. $x = 8$.

Câu 6. Nghiệm của phương trình $\frac{1}{C_4^x} - \frac{1}{C_5^x} = \frac{1}{C_6^x}$ là :

A. $x = 1$

B. $x = 2$

C. $x = 3$

D. $x = 4$.

Câu 7. Nghiệm của phương trình $A_{x+3}^2 = C_{x+2}^3 + 20$ là:

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4.

Câu 8. Xét dãy $U_n = \frac{195}{4P_n} - \frac{A_{n+3}^3}{P_{n+1}}$.

Có bao nhiêu số hạng dương của dãy?

A. 3

B. 5

C. 7

D. 4.

Câu 9. Cho $n \in \mathbb{N}$ thoả $C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149$.

Giá trị của biểu thức $A = \frac{A_{n+1}^4 + 3A_n^3}{(n+1)!}$ là:

A. $3/4$

B. $4/3$

C. $1/3$

D. $2/3$

Câu 10. Xét dãy $x_n = \frac{A_{n+4}^4}{P_{n+2}} - \frac{143}{4.P_n}$. Số các số hạng âm của dãy (x_n) là

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 8.

Câu 11. Số hạng ở giữa của khai triển $\left(x^{\frac{-1}{5}} + x^{\frac{1}{3}}\right)^{10}$ là số hạng nào sau đây :

- A. $210x^{\frac{6}{5}}$ B. $242x^{\frac{-2}{3}}$ C. $252x^{\frac{2}{3}}$ D. $252x^{\frac{-2}{3}}$

Câu 12. Số hạng không chứa x của khai triển $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$ là:

- A. 15 B. 25 C. 35 D. 45.

Câu 13. Cho biết số hạng thứ 5 của khai triển $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}\right)^n$ không phụ thuộc vào x thì giá trị của A_n^2 là:

- A. 180 B. 240 C. 300 D. 360.

Câu 14. Số hạng chính giữa của khai triển $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{2008}$ là:

- A. $C_{2008}^{1004} \times \frac{1}{x^{1004}}$ B. $C_{2008}^{1005} \times \frac{1}{x^{1005}}$ C. $C_{2008}^{1003} \times \frac{1}{x^{1003}}$ D. $C_{2008}^{1004} < x^{1004}$.

Câu 15. Số hạng hữu tỉ của khai triển $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^5$ là:

- A. 15 B. 20 C. 40 D. 60.

Câu 16. Số hạng nguyên của khai triển $\left(\sqrt{5} + \frac{4}{\sqrt[3]{2}}\right)^7$ là:

- A. 25000 B. 28000 C. 30000 D. 32000.

Câu 17. Cho khai triển $\left(2^{\frac{x-1}{x}} + 2^{\frac{-x}{3}}\right)^n$ với $C_n^3 = 5C_n^1$ và số hạng thứ tự của

khai triển là $20n$. Giá trị của x và n là:

- A. $x = 4; n = 7$ B. $x = 7; n = 4$ C. $x = 6; n = 5$ D. $x = 5; n = 7$

Câu 18. Cho biết hệ số của số hạng thứ 3 trong khai triển $\left(x - \frac{1}{3}\right)^n = 5$, số hạng chính giữa của khai triển là:

- A. $\frac{28}{45}x^5$ B. $-\frac{28}{45}x^5$ C. $\frac{28}{27}x^5$ D. $-\frac{28}{27}x^5$.

Câu 19. Hệ số lớn nhất của khai triển $\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}x\right)^4$ là:

- A. 9/16 B. 9/64 C. 27/64 D. 15/64.

Câu 20. Cho $P(x) = (x+1)^2 + (x+1)^3 + (x+1)^4 + (x+1)^5$. khai triển rồi viết $P(x)$ dạng đa thức thì hệ số của x^3 của $P(x)$ là:

- A. 6 B. 9 C. 12 D. 15.

Câu 21. Nghiệm của phương trình $C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n = 243$ là:

- A. $n = 5$ B. $n = 6$ C. $n = 8$ D. $n = 10$

Câu 22. Giá trị biểu thức $P = 3^{16}C_{16}^0 - 3^{15}C_{16}^1 + \dots + 3^{(0)}C_{16}^{16}$ là:

- A. 3^{16} B. 2^{16} C. 4^{16} D. 0.

Câu 23. Khi viết $P(x) = (3x - 2)^n$ thành dạng đa thức thì tổng tất cả các hệ số của $P(x)$ có giá trị là:

- A. 5^n B. $3^n - 2^n$ C. 1 D. $3^n + 2^n$.

Câu 24. Hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển $(1 + 2x + 3x^2)^{10}$ là:

- A. 8085 B. 6006 C. 4536 D. 64.

Câu 25. Trong khai triển $(x + 2)^n$. Cho biết số hạng thứ 11 có hệ số lớn nhất. Giá trị của số n là:

- A. $n = 12$ B. $n = 13$ C. $n = 14$ D. $n = 15$.

HƯỚNG DẪN GIẢI TRẮC NGHIỆM VỀ CÔNG THỨC NEWTON

Câu 1. A và C đúng theo tính chất của công thức tổ hợp .

B đúng vì $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$\frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1} = \frac{n}{k} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} C_n^k$. Vậy chỉ D là sai.

Câu 2. $C_n^{12} = C_n^8 \Leftrightarrow \frac{n!}{12!(n-12)!} = \frac{n!}{8!(n-8)!} \quad (n \geq 2)$

$\Leftrightarrow (n-8)(n-9)(n-10)(n-11) = 12 \times 11 \times 10 \times 9 \quad \Leftrightarrow n = 20.$

$C_n^{17} = C_{20}^{17} = 1140$. Chọn câu A.

Câu 3. Điều kiện $n \geq 6$. Phương trình trở thành :

$n^2 - 19n + 90 = 0 \Leftrightarrow n = 9$ hay $n = 10$. Chọn câu B.

Câu 4. Điều kiện $n \geq 2$. Phương trình trở thành :

$n(n-1)n = 48 \Leftrightarrow n^3 - n^2 - 48 = 0 \Leftrightarrow n = 4$. Chọn câu B.

Câu 5. Điều kiện $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. Phương trình trở thành :

$x \left[\frac{1}{6}(x-2)(x-1) + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{5}{2} \right] = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$

Chọn $x = 4$. Chọn câu A.

Câu 6. Điều kiện $0 \leq x \leq 4$. Phương trình trở thành :

$1 - \frac{5-x}{5} = \frac{(5-x)(6-x)}{5.6} \Leftrightarrow x^2 - 17x + 30 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ và $x = 15$.

Chọn $x = 2$. Chọn câu B.

Câu 7. Điều kiện $x \geq 1$. Phương trình trở thành:

$\frac{(x+3)!}{(x+1)!} = \frac{(x+2)!}{3.(x-1)!} + 20$

$\Leftrightarrow (x+2)(x+3) = \frac{x(x+1)(x+2)}{6} + 20 \Leftrightarrow x = 3$

Chọn câu C

Câu 8. $U_n = \frac{195}{4n!} - \frac{(n+3)!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{n!} \left[\frac{195}{4} - (n+2)(n+3) \right]$

$$U_n > 0 \Leftrightarrow (n+2)(n+3) < \frac{195}{4} \Leftrightarrow n^2 + 5n - \frac{171}{4} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-5-14}{5} < n < \frac{-5+14}{2} \Rightarrow 0 < n < \frac{9}{2}, n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow n = 1, 2, 3, 4.$$

Chọn câu D.

Câu 9. Giải phương trình (1): $n^2 + 4n - 45 = 0 \Leftrightarrow n = 5$. Giá trị biểu thức

$$A = \frac{A_6^4 + 3A_5^3}{6!} = \frac{3}{4}. \text{ Chọn câu A.}$$

Câu 10. $x_n = \frac{4(n+3)(n+4)}{4n!}$

Để ý rằng

$$x_n > 0 \Leftrightarrow 4n^2 + 28n - 95 < 0 \Leftrightarrow -\frac{38}{4} < n < \frac{10}{4}$$

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 1, n = 2.$$

Vậy có 2 số hạng âm. Chọn câu B.

Câu 11. Số hạng ở giữa của khai triển là số hạng thứ 6 ứng với $k = 5$, số

$$\text{hạng ở giữa của khai triển là: } C_{10}^5 (x^{-\frac{1}{5}})^5 (x^{\frac{1}{3}})^5 = C_{10}^5 x^{\frac{2}{3}} = 252x^{\frac{2}{3}}.$$

Chọn câu C.

Câu 12. $a_k = C_7^k x^{\frac{7-k}{3}} \cdot x^{-\frac{k}{4}} = C_7^k x^{\frac{7-k}{3} - \frac{k}{4}}.$

$$a_k \text{ không chứa } x \Leftrightarrow \frac{7-k}{3} - \frac{k}{4} = 0 \Leftrightarrow k = 4.$$

$$a_k = C_7^4 = 35. \text{ Chọn câu C.}$$

Câu 13. Số hạng thứ 5 (ứng với $k = 4$) của khai triển là:

$$C_n^4 (x^{\frac{1}{3}})^{n-4} (x^{-1})^4 = C_n^4 x^{\frac{n-4}{3} - 4} = C_n^4 x^{\frac{n-16}{3}}.$$

Để số hạng không phụ thuộc vào x thì $n = 16$. Khi đó $A_{16}^2 = 240$.

Chọn câu B.

Câu 14. Số hạng chính giữa ứng với $k = 1004$. Số hạng ở giữa là:

$$C_{2008}^{1004} x^{1004} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{1004} = C_{2008}^{1004} \frac{1}{x^{1004}}. \text{ Chọn câu B.}$$

Câu 15. số hạng tổng quát của khai triển $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^5$ là:

$$a_k = C_5^k (\sqrt{2})^{5-k} (\sqrt[3]{3})^k = C_5^k 2^{\frac{5-k}{2}} \cdot 3^{\frac{k}{3}}$$

Để a_k là: số hữu tỉ thì $\frac{5-k}{2}$ và $\frac{k}{3}$ đều là số nguyên. Do đó $k = 3$. Vậy

số hạng hữu tỉ của khai triển là: $a_3 = C_5^3 \cdot 2 \cdot 3 = 60$. Chọn câu D.

Câu 16. Số hạng tổng quát của khai triển $\left(\sqrt{5} + \frac{4}{\sqrt[3]{2}}\right)^7$ là:

$$a_k = C_7^k 5^{\frac{7-k}{2}} 2^{\frac{5k}{3}}, \quad 0 \leq k \leq 7$$

Để $a_k \in \mathbb{Z}$ thì $\frac{7-k}{2}$ và $\frac{5k}{3}$ đều là số nguyên. $0 \leq k \leq 7 \Rightarrow k = 3$. Vậy số

hạng phải tìm là: $C_7^3 5^2 2^5 = 28000$. Chọn câu B.

Câu 17. Pt $\Leftrightarrow \frac{n!}{3!(n-3)!} = 5 \frac{n!}{(n-1)!}$

$$C_n^3 = 5C_n^1 \Leftrightarrow 5 \frac{n!}{(n-1)!} \Leftrightarrow (n-2)(n-1) = 30$$

$$\Leftrightarrow n = 7. (n \neq 3).$$

Số hạng thứ 4 là: $C_n^3 2^{\frac{n-1}{2}} 2^{\frac{n-3}{2}} = 20n$. Với $n = 7$ thì:

$$C_7^3 2^{x-2} = 144 \Leftrightarrow 2^{x-2} 4 \Leftrightarrow x = 4. \text{ Chọn câu A.}$$

Câu 18. Hệ số của số hạng thứ ba là: $C_n^2 \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 5 \Leftrightarrow n^2 - n - 90 = 10 \Leftrightarrow n = 10$.

Số hạng chính giữa là: $C_{10}^5 \left(-\frac{1}{3}\right)^5 x^5 = -\frac{28}{27} x^5$. Chọn câu D.

Câu 19. $\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}x\right)^4 = \frac{1}{4^4} (1 + 3x)^4$. Xét hệ số a_k của khai triển $(1 + 3x)^4$:

$$a_k = C_4^k 3^k. \text{ Giải hệ } \begin{cases} a_k > a_{k+1} \Leftrightarrow k > \frac{11}{4} \\ a_k > a_{k-1} \Leftrightarrow k < \frac{15}{4} \end{cases} \Rightarrow k \in \mathbb{Z}, \frac{11}{4} < k < \frac{15}{4} \Rightarrow k = 3.$$

Vậy hệ số lớn nhất của khai triển $\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}x\right)^4$ là: $\frac{1}{4^4} C_4^3 3^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$.

Chọn câu D.

Câu 20. Hệ số của x^3 trong khai triển của $P(x)$ là:

$$C_3^3 + C_4^3 + C_5^3 = 15. \text{ Chọn câu D.}$$

Câu 21. Để ý $3^n = (2 + 1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k 2^k$. Do đó phương trình trở thành: $3^n = 243 \Rightarrow n = 5$. Chọn câu A.

Câu 22. Để ý $2^{16} = (3 - 1)^{16} = \sum_{k=0}^{16} C_{16}^k 3^{16-k} (-1)^k$.

Câu 23. $P(x) = (3x - 2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$.

Do đó $a_0 + a_1 + \dots + a_n = p(1) = (3 - 2)^n = 1$. Chọn câu C.

Câu 24. Ta có: $(1 + 2x + 3x^2)^{10} = [(1 + 2n) + 3x^2]^{10}$
 $= C_{10}^0 (1 + 2n)^{10} + C_{10}^1 (1 + 2n)^9 3x^2 + C_{10}^2 (1 + 2n)^8 9x^4 + \dots$

Hệ số của x^4 là: $C_{10}^0 C_{10}^4 2^4 + 3C_{10}^1 C_9^2 2^2 + 9C_{10}^2 C_8^0 = 8085$

Chọn câu A.

Câu 25. Hệ số thứ 11 của khai triển là: $C_n^{10} 2^{10} = a_{10}$.

Hệ số thứ 12 của khai triển là: $C_n^{11} 2^{11} = a_{11}$.

Hệ số thứ 10 của khai triển là: $C_n^9 2^9 = a_9$.

Giải hệ: $\begin{cases} a_{10} > a_9 \\ a_{10} > a_{11} \end{cases} \Rightarrow 14 < n < \frac{31}{2} \Rightarrow n = 15$. Chọn câu D.

3.2. TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP ĐẠI SỐ TỔ HỢP

- Câu 1.** Từ các chữ số. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể thành lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau :
- A. 27216 B. 10^4 C. 30240 D. 3024.
- Câu 2.** Tổng tất cả các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được lập từ các chữ số 3, 4, 5, 6, 7 có giá trị là:
- A. 111110 B. 6666600 C. 333330 D. 777700
- Câu 3.** Nghiệm của phương trình $C_{x+2}^3 = C_{x+2}^4$ là:
- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7.
- Câu 4.** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể thành lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ gồm các chữ số khác nhau trong khoảng (2000, 3000).
- A. 12 B. 24 C. 36 D. 48.
- Câu 5.** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể thành lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau trong đó phải có mặt chữ số 0.
- A. 120 B. 600 C. 312 D. 480.
- Câu 6.** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể thành lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau trong đó phải có mặt hai chữ số 1 và 5?
- A. 120 B. 480 C. 360 D. 535
- Câu 7.** Một đa giác lồi có 35 đường chéo thì số cạnh của đa giác là:
- A. 7 B. 8 C. 10 D. 12.
- Câu 8.** Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số biết rằng hai chữ số đứng kề nhau thì phải khác nhau :
- A. 4536 B. 6561 C. 9000 D. 3024.
- Câu 9.** Có bao nhiêu cách xếp 5 học sinh nam và 5 học sinh nữ ngồi xen kẽ nhau quanh một bàn tròn?
- A. $(5!)^2$ B. $(4!)^2$ C. $5! + 4!$ D. $5! \cdot 4!$.
- Câu 10.** Từ các chữ số. 1, 2, 3, 4, 5 có thể thành lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau và chia hết cho 3?
- A. 9 B. 12 C. 15 D. 24.
- Câu 11.** Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 6 chữ số khác nhau mà chữ số đầu tiên là: chữ số lẻ?

A. 42000 B. 8400 C. 1050 D. 36000.

Câu 12. Cho hai đường thẳng song song d_1 và d_2 . Trên d_1 có 10 điểm, trên d_2 có 12 điểm. Có bao nhiêu hình thang có đỉnh là các điểm trên?

A. C_{22}^4 B. $C_{10}^2 + C_{12}^2$ C. $C_{10}^2 \cdot C_{12}^2$ D. $C_{22}^4 - 22$.

Câu 13. Trên mỗi mặt của hình lập phương có 3 điểm. Hỏi có bao nhiêu tam giác có đỉnh là các điểm trên và không nằm trong mặt nào của lập phương?

A. 810 B. 720 C. 816 D. 792.

Câu 14. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4 người ta lập nên các số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau. Tổng các số này có giá trị là:

A. 66660 B. 5555 C. 133320 D. 555550.

Câu 15. Một lớp có 20 học sinh trong đó có 1 lớp trưởng và 1 lớp phó. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 3 học sinh trong đó phải có ít nhất 1 cán bộ lớp?

A. 312 B. 324 C. 306 D. 368.

Câu 16. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau và chia hết cho 5

A. 136 B. 328 C. 72 D. 144.

Câu 17. Một tổ trực có 9 học sinh, thầy giáo muốn chia thành 3 nhóm lần lượt có 4, 3, 2 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chia?

A. 137 B. 1260 C. 144 D. 212.

Câu 18. Số giao điểm tối đa của 10 đường tròn là:

A. 30 B. 20 C. 72 D. 36.

Câu 19. Một tập hợp gồm 10 đường thẳng và 6 đường tròn. Số giao điểm tối đa của các phần tử của tập hợp trên là:

A. 120 B. 165 C. 195 D. 150.

Câu 20. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau và chia hết cho 5?

A. 952 B. 1008 C. 448 D. 1064.

Câu 21. Trong mặt phẳng cho 10 điểm trong đó có 4 điểm thẳng hàng và 3 điểm bất kì nào khác đều không thẳng hàng. Có bao nhiêu tam giác khác nhau có đỉnh là các điểm đã cho?

A. 20 B. 26 C. 72 D. 116.

Câu 22. Cho X là tập hợp gồm 4 chữ số khác nhau và khác 0. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên gồm các chữ số khác nhau của X?

A. 24 B. 36 C. 48 D. 64.

Câu 23. Một bộ đề thi toán gồm 15 câu đại số, 10 câu hình học và 5 câu lượng giác. Để chọn ra 1 đề thi gồm 5 câu hỏi phải có đủ cả 3 môn trong đó ít nhất phải có hai câu đại số thì số cách chọn là:

- A. 56875 B. 65357 C. 65375 D. 57785.

Câu 24. Trên đường tròn có 10 điểm, giả sử các đường thẳng nối các điểm này đều cắt nhau đôi một và không có 3 đường thẳng nào đồng quy. Hỏi chúng cắt nhau tại bao nhiêu giao điểm?

- A. 210 B. 420 C. 630 D. 480.

Câu 25. Có bao nhiêu số tự nhiên lẻ gồm 3 chữ số?

- A. 420 B. 450 C. 640 D. 360.

Câu 26. Đặt $f(n) = A_{n-3}^{7-n}$. Tập hợp các giá trị của $f(n)$ là:

- A. $\{2, 3\}$ B. $\{1, 3\}$ C. $\{1, 2, 3\}$ D. $\{1, 2, 3, 4\}$.

Câu 27. Cho dãy $U_n = \frac{5}{4}A_{n-2}^2 - C_{n-1}^4 + C_{n-1}^3$. Có bao nhiêu số hạng dương của dãy U_n ?

- A. 6 B. 8 C. 10 D. 7.

Câu 28. Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{1,5}$ là:

- A. 2003 B. 3300 C. 1334 D. 3430.

Câu 29. Giá trị của tổng $S = C_n^0 + 9C_n^1 + 9^2C_n^2 + \dots + 9^nC_n^n$ là:

- A. $S = 9^n$ B. $S = n \cdot 9^n$ C. $S = (n+1)9^n$ D. 10^n .

Câu 30. Cho biết hệ số của số hạng thứ 3 trong khai triển $\left(x - \frac{1}{x}\right)^n$ bằng

5. Số hạng chính giữa của khai triển là:

- A. $\frac{28}{27}x^4$ B. $\frac{28}{27}x^5$ C. $\frac{27}{28}x^6$ D. $\frac{27}{28}x^5$.

Câu 31. Đặt $S = 1 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n$. Giá trị của S là:

- A. $S = \frac{2^n + 1}{n}$ B. $S = \frac{2^n - 1}{n}$ C. $S = \frac{2^{n+1} + 1}{n}$ D. $S = \frac{2^{n-1} - 1}{n}$.

Câu 32. Đẳng thức nào dưới đây là đúng: $S = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n$.

- A. $S = 2^n$ B. $S = n2^{n-1}$ C. $S = n \cdot 2^n$ D. $S = (n-1)2^n$.

Câu 33: Cho $f(x) = (1+x)^9 + (1+x)^{10} + \dots + (1+x)^{14}$, khi viết $f(x)$ về dạng đa thức $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{14}x^{14}$ thì hệ số a_9 là:

- A. 1324 B. 3003 C. 3030 D. 4321.

Câu 34. Cho biết hệ số của số hạng thứ 3 trong khai triển $\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^n$ bằng

31 thì giá trị của n là:

- A. $n = 16$ B. $n = 20$ C. $n = 26$ D. $n = 32$.

Câu 35. Cho biết hệ số của số hạng thứ 3 trong khai triển $(x + x^{\log})^5$ bằng 10^6 thì giá trị của x là:

- A. 10 hay 10^{-2} B. 10 hay 10^2 C. 10^{-2} hay $10^{-\frac{5}{2}}$ D. 1 hay $10^{\frac{-5}{2}}$.

Câu 36. Nghiệm của hệ $\begin{cases} C_{x+1}^{y+1} = C_{x+1}^y \\ 3C_{x+1}^y = 5C_{x+1}^{y-1} \end{cases}$ là:

- A. $x = 2; y = 3$ B. $x = 3; y = 2$ C. $x = 6; y = 3$ D. $x = 3; y = 6$.

Câu 37. Nghiệm của hệ $\begin{cases} 2A_x^y + 5C_x^y = 90 \\ 5A_x^y - 2C_x^y = 80 \end{cases}$ là:

- A. $x = 5; y = 2$ B. $x = 2; y = 5$ C. $x = 5; y = 3$ D. $x = 6; y = 4$.

Câu 38. Cho $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau của X mà tổng của 3 chữ số đó bằng 10?

- A. 18 B. 20 C. 15 D. 54.

Câu 39. Một tổ gồm có 15 người, để thành lập ban cán sự tổ gồm chủ tịch, phó chủ tịch và 3 ủy viên thì có bao nhiêu cách?

- A. 132. A_{10}^3 B. $A_{10}^2 \cdot C_{10}^3$ C. A_{12}^5 D. C_{15}^5 .

Câu 40. Một họ gồm n đường thẳng song song cắt một họ gồm m đường thẳng song song khác. Số hình bình hành tạo thành là:

- A. $C_n^2 + C_m^2$ B. $2(C_n^2 + C_m^2)$ C. $C_n^2 \cdot C_m^2$ D. $2C_n^2 \cdot C_m^2$.

Câu 41. Hãy chọn mệnh đề đúng dưới đây.

- A. $C_n^k + 2C_n^{k-1} + C_n^{k-2} = C_{n+1}^{k+1}$

$$B. C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+3}^k$$

$$C. C_n^k + 2C_n^{k-1} + C_n^{k-2} = C_{n+2}^{k+1}$$

$$D. C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+3}^{k+1}$$

Câu 42. Số hạng không chứa x của khai triển. $\left(2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{10}$ là:

A. 3360

B. 1680

C. 6720

D. 420.

Câu 43. Cho $X = \{a, b, c, d\}$.

Có bao nhiêu tập hợp con của X có chứa phần tử a?

A. 3

B. 4

C. 8

D. 16.

Câu 44. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau trong đó phải có mặt các chữ số 0, 1, 2?

A. 8400

B. 12600

C. 24000

D. 21000.

Câu 45. Có bao nhiêu cách xếp 3 nam và 2 nữ vào ngồi một dãy gồm 8 ghế sao cho 3 nam ngồi kề nhau, 2 nữ ngồi kề nhau và ở giữa hai nhóm có 1 ghế trống?

A. 36

B. 72

C. 48

D. 64.

Câu 46. Tổng $C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1}$ có giá trị bằng:

A. $2^n - 1$

B. 2^{n-1}

C. $2^n - 2$

D. 2

Câu 47. Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau biết rằng các số đó lớn hơn 300000 và chia hết cho 5?

A. 120

B. 78

C. 48

D. 72

Câu 48. Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số trong đó phải có mặt chữ số 0?

A. 1440

B. 1560

C. 1200

D. 720.

Câu 49. Tìm $n \in \mathbb{N}$ thỏa $P_{n+3} = 720A_n^5P_{n-5}$.

A. $n = 9$

B. $n = 5$

C. $n = 7$

D. $n = 11$.

Câu 50. Nghiệm của bất phương trình $\frac{A_{n+4}^4}{(n+2)!} < \frac{15}{(n-1)!}$.

A. $\{2, 3\}$

B. $\{2, 3, 4\}$

C. $\{3, 4, 5\}$

D. $\{4, 5\}$.

Đáp Án

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Chọn	A	B	B	C	D	B	C	B	C	D
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Chọn	A	C	A	A	B	A	B	C	C	A
Câu	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Chọn	D	D	A	A	B	C	D	A	D	B
Câu	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Chọn	D	B	B	D	A	C	A	d	A	C
Câu	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Chọn	B	A	C	D	B	C	A	A	C	C

Chương 4: Số Phức

A. Tóm tắt lý thuyết

I. Số Phức–Biểu Diễn Hình Học–Số Phức Liên Hợp

1. Định nghĩa: Một số phức là một biểu thức dạng $a+bi$ trong đó a, b là các số thực và số i thỏa mãn: $i^2 = -1$. Ký hiệu số phức: $Z = a+bi$, a gọi là phần thực, b gọi là phần ảo.

Chú ý: + Mỗi số thực a được coi là một số phức có phần ảo bằng 0:
 $z = a+0i = a \in \mathbb{R}$.

+ Số phức có phần thực bằng 0 gọi là số ảo $z = 0+bi = bi; i = 0+1i$

+ Cho $z = a+bi$ và $z' = a'+b'i$

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

2. Biểu diễn hình học:

+ Mỗi số phức $Z = a+bi$ được biểu diễn bởi điểm $M(a, b)$ và ngược lại, ký hiệu: $M(z)$ hoặc $M(a+bi)$.

+ Các điểm trên Ox biểu diễn các số thực, do đó trục Ox gọi là trục thực.

+ Các điểm trên Oy biểu diễn các số ảo, do đó trục Oy gọi là trục ảo.

3. Số phức liên hợp:

Số phức liên hợp của số phức: $Z = a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) là số phức $\bar{Z} = a-bi$

$$+ \bar{\bar{Z}} = Z$$

+ Hai số phức liên hợp có điểm biểu diễn tương ứng đối xứng qua Ox.

4. Modul của số phức

Định nghĩa: Modul của số phức $Z = a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) là số thực dương $\sqrt{a^2+b^2}$ được ký hiệu là $|Z|$.

+ Nếu $Z = a+bi$ thì: $|Z| = OM$. M là điểm biểu diễn của Z trong hệ trục xOy.

II. Phép tính số phức

1. Phép cộng và phép trừ số phức:

a) Tổng của 2 số phức: Cho $Z = a+bi$ và $Z' = a'+b'i$

$$Z+Z' = a+a'+(b+b')i \quad (a, b, a', b' \in \mathbb{R})$$

$$+ (Z + Z') + Z'' = Z + (Z' + Z'') \text{ với } Z, Z', Z'' \in \mathbb{C}$$

$$Z + Z' = Z' + Z$$

$$Z + 0 = 0 + Z = Z$$

$$+ Z = a + bi \text{ thì } -Z = -a - bi \text{ gọi là số phức đối của } Z + (-Z) = 0.$$

b) Hiệu của hai số phức:

Hiệu của hai số phức Z và Z' là tổng của Z và $-Z'$

$$Z - Z' = Z + (-Z')$$

Với $Z = a + bi$ và $Z' = a' + b'i$ thì

$$Z - Z' = a - a' + (b - b')i.$$

. Ý nghĩa hình học của phép cộng và phép trừ

Trong mặt phẳng phức $M(a,b)$ là điểm biểu diễn của số phức $Z = a + bi$ ta cũng gọi $\vec{u} = (a,b)$ là biểu diễn của Z nghĩa là nếu M là điểm biểu diễn của

số phức $Z = a + bi$ thì $\overrightarrow{OM}$ là vectơ biểu diễn của Z

. Nếu $\vec{u}, \vec{u}'$ lần lượt là vectơ biểu diễn của Z và Z'

thì $\vec{u} + \vec{u}'$ là vectơ biểu diễn của $Z + Z'$

và $\vec{u} - \vec{u}'$ là vectơ biểu diễn của $Z - Z'$.

2. Phép nhân số phức:

a) Định nghĩa: Cho hai số phức $Z = a + bi$ và $Z' = a' + b'i$

$$Z.Z' = aa' - bb' + (ab + ba')i \quad (a, b, a', b' \in \mathbb{R})$$

b) Tính chất: $Z.Z' = Z'.Z$

$$Z(Z'.Z'') = (Z.Z')Z''$$

$$Z(Z' + Z'') = Z.Z' + Z.Z''$$

$$k \in \mathbb{R}, k.Z = ka + kbi.$$

3. Phép chia số phức khác 0

Định nghĩa: Cho số phức $Z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ khác 0.

Số phức $Z^{-1} = \frac{\bar{Z}}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{Z}}{|Z|^2}$ gọi là nghịch đảo của Z .

Thương $\frac{Z'}{Z}$ của phép chia số phức Z' cho số phức Z khác 0 là tích của Z' với nghịch đảo của Z .

$$\frac{Z'}{Z} = Z' \cdot Z^{-1} = \frac{Z' \cdot \bar{Z}}{|Z|^2}$$

Chú ý : $\frac{Z'}{Z} = \frac{Z' \bar{Z}}{|Z|^2} = \frac{Z' \bar{Z}}{Z \cdot \bar{Z}}$. Do đó để tìm $\frac{Z'}{Z}$ ta nhân mẫu với $\bar{Z}$.

III. Căn bậc hai của số phức- Phương trình bậc 2

1. Định nghĩa: Cho số phức ω , số phức z thỏa $z^2 = \omega$ gọi là 1 căn bậc hai của ω .

2. Tìm căn bậc hai:

a) Trường hợp ω là số thực thì $\omega = a$

. $a = 0$ thì căn bậc 2 của ω là 0

. $a > 0$: $z^2 = a \Leftrightarrow (z + \sqrt{a})(z - \sqrt{a}) = 0$. Có hai căn bậc 2 của ω là $\sqrt{a}$ và $-\sqrt{a}$

. $a < 0$: $Z^2 = a \Leftrightarrow (Z - i\sqrt{-a})(Z + i\sqrt{-a}) = 0$: có hai căn bậc hai của ω là: $\sqrt{-ai}$ và $-\sqrt{-ai}$.

b) Trường hợp : $\omega = a + bi$ ($b \neq 0$)

$Z = x + yi$ là căn bậc hai của ω : $(x + yi)^2 = a + bi$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \text{ Giải hệ ta có: Hai căn bậc hai của } \omega \text{ là hai số đối nhau}$$

3. Phương trình bậc hai:

Dạng: $AZ^2 + BZ + C = 0$ với A, B, C là số phức ($A \neq 0$)

Cách giải: Lập: $\Delta = B^2 - 4AC$

Nếu $\Delta \neq 0$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$$Z_1 = \frac{-B + \mathcal{J}}{2A}, Z_2 = \frac{-B - \mathcal{J}}{2A}$$

Với $\mathcal{J}$ là một căn bậc hai của Δ .

Chú ý: Nếu Δ là số thực dương thì hai nghiệm là:

$$Z_1 = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A}, Z_2 = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A}$$

Nếu Δ là số thực âm thì hai nghiệm là:

$$Z_1 = \frac{-B + \sqrt{-\Delta i}}{2A}, Z_2 = \frac{-B - \sqrt{-\Delta i}}{2A}$$

Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $Z = \frac{-B}{2A}$.

IV. Dạng lượng giác của số phức – Ứng dụng

1. Dạng lượng giác:

a) Argumen của số phức $Z \neq 0$: Cho số phức $Z \neq 0$ có điểm biểu diễn trong mặt phẳng là M. Số đo (bằng radian) của góc lượng giác tia đầu là Ox và tia cuối OM được gọi là Argumen của Z.

Nếu φ là một Argumen của Z thì mọi Argumen của Z có dạng : $\varphi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

b) Dạng lượng giác của số phức:

Dạng : $Z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ với $r = |z|$ và φ là một Argumen của Z gọi là dạng lượng giác của số phức Z.

Chú ý: Để tìm dạng lượng giác của số phức $Z = a + bi$ ta cần:

- Tìm $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

- Tìm φ với $\cos \varphi = \frac{a}{r}$, $\sin \varphi = \frac{b}{r}$

c) Nhân và chia số phức Z ở dạng lượng giác

Cho $Z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ và $Z' = r'(\cos \varphi' + i \sin \varphi')$

Thì : $ZZ' = r.r'[\cos(\varphi + \varphi') + i \sin(\varphi + \varphi')]$

$$\frac{Z'}{Z} = \frac{r'}{r}[\cos(\varphi' - \varphi) + i \sin(\varphi' - \varphi)]$$

d) Công thức Moivre: $[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n[\cos n\varphi + i \sin n\varphi]$

e) Căn bậc hai của số phức dạng lượng giác

Cho $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, có hai căn bậc hai của z là:

$$\sqrt{r}\left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2}\right) \text{ và } -\sqrt{r}\left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\left(\text{đề ý : } -\sqrt{r}\left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right)\right)\right)$$

B. Bài tập áp dụng:

I. Biểu diễn số phức dạng hình học

Bài 1: Cho các số phức : $Z_1 = 3 + 2i, Z_2 = 1 - 2i$.

- Viết các số phức đối với biểu diễn trong chúng trong mặt phẳng phức.
- Viết các số phức liên hợp và biểu diễn chúng trong mặt phẳng phức.

Hướng dẫn giải:

- a) $Z_1 = 3 + 2i$ có điểm biểu diễn $M_1(3, 2)$.

Số phức đối là: $-Z_1 = -3 - 2i$ có điểm biểu diễn là $M_1'(-3, -2)$.

$Z_2 = 1 - 2i$ có điểm biểu diễn $M_2(1, -2)$; số phức đối là $-Z_2 = -1 + 2i$ có điểm biểu diễn là $M_2'(-1, 2)$.

- b) Số phức liên hợp của Z_1 là $\overline{Z_1} = 3 - 2i$ có điểm biểu diễn là $N_1(3, -2)$.

Số phức liên hợp của Z_2 là $\overline{Z_2} = 1 + 2i$ có điểm biểu diễn là $N_2(1, 2)$.

Bài 2: Tìm tập hợp các điểm biểu diễn của các số phức sau:

- $Z = a + 2i$ khi a thay đổi.
- $Z = a - ai$ khi a thay đổi.
- $Z = a + 3ai$ khi a thay đổi.

Hướng dẫn giải:

- $Z = a + 2i$ có điểm biểu diễn trong mặt phẳng phức là điểm $M(a, 2)$, do đó khi a thay đổi thì tập hợp các điểm M là đường thẳng $y = 2$.
- $Z = a - ai$ có điểm biểu diễn là $M(a, -a)$, do đó khi a thay đổi thì tập hợp các điểm M là đường thẳng $y = -x$ hay $x + y = 0$.
- $Z = a + 3ai$ có điểm biểu diễn của số phức là $M(a, 3a)$, do đó tập hợp các điểm M là đường thẳng $y = 3x$.

Bài 3: Cho A là điểm biểu diễn của số phức $Z = 1 - 2i$. Gọi M_1, M_2 lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức Z_1, Z_2 . Chứng minh rằng điều kiện để $\triangle AM_1M_2$ cân tại M_1 là: $|Z_1 - 1 + 2i| = |Z_2 - Z_1|$.

Hướng dẫn giải:

$\triangle AM_1M_2$ cân tại M_1 là $M_1A = M_1M_2$

$$M_1 A = |Z_1 - Z| = |Z_1 - 1 + 2i|$$

$$M_1 M_1 = |Z_2 - Z_1|. \text{ Do đó : } |Z_1 - 1 + 2i| = |Z_2 - Z_1|.$$

Bài 4: Cho $Z = a + bi$. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn của Z thỏa điều kiện $|Z - 2 - i| = 1$.

Hướng dẫn giải:

Gọi $I(2,1)$ là điểm biểu diễn của số phức : $2 + i$.

$$|Z - 2 - i| = |(a - 2 + b - 1)i| = \sqrt{(a - 2)^2 + (b - 1)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow (a - 2)^2 + (b - 1)^2 = 1.$$

Do đó tập hợp các điểm $M(a,b)$ (Biểu diễn số phức Z) là đường tròn tâm I bán kính $R = 1$.

Bài 5: Cho A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $Z_A = 3 - i, Z_B = -2 + 3i$ và $Z_C = -1 - 2i$. Chứng minh rằng điểm biểu diễn của số phức tổng $Z_A + Z_B + Z_C$ là trọng tâm ΔABC .

Hướng dẫn giải:

Ta có: $Z_A + Z_B + Z_C = 3 - i + (-2 + 3i) + (-1 - 2i) = 0$. Biểu diễn hình học ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \Leftrightarrow O$ là trọng tâm ΔABC . Vậy điểm biểu diễn của số phức tổng $Z_A + Z_B + Z_C$ trong mặt phẳng phức gốc O cùng là trọng tâm tam giác ABC .

II. Phép tính về số phức.

Bài 1: Thực hiện các phép tính sau:

a) $(2 + 5i) + (3 - 2i) - (1 + i)$

b) $(0,5 - 2,5i) + (1,5 + 0,5i) - (1 + i)$

c) $(1 + i)(-3 - i)$

d) $(1 - i)(a + \sqrt{b}i)(a - \sqrt{b}i)$.

Hướng dẫn giải:

a) $2 + 5i + 3 - 2i - (1 + i) = 4 + 2i$

b) $0,5 - 2,5i + 1,5 + 0,5i - (1 + i) = 1 - i$

c) $(1 + i)(-3 - i) = -2 - 4i$

d) $(1 - i)(a + \sqrt{b}i)(a - \sqrt{b}i) = (1 - i)(a^2 + b^2) = (a^2 + b^2) - (a^2 + b^2)i$.

Bài 2: Thực hiện các phép tính:

a) $(1-i)^2$ b) $(2+3i)^2$ c) $(1+i)^3$ d) $(1+i)^4$.

Hướng dẫn giải:

a) $(1-i)^2 = 1 + i^2 - 2i = -2i$ b) $(2+3i)^2 = 4 + 9i^2 + 12i = -5 + 12i$

c) $(1+i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = -2 + 2i$ d) $(1+i)^4 = (2i)^2 = 4i^2 = -4$.

Bài 3: Viết các số phức sau đây về dạng đại số:

a) $\frac{1}{(1+2i)(3-i)}$ b) $\frac{1+2i}{1-2i}$ c) $\frac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}$.

Hướng dẫn giải:

a) $\frac{1}{(1+2i)(3-i)} = \frac{1}{5(1+i)} = \frac{1-i}{10} = \frac{1}{10} - \frac{1}{10}i$

b) $\frac{1+2i}{1-2i} = \frac{(1+2i)^2}{1+4} = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$

c) $\frac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2} = \frac{44}{318} - \frac{5}{318}i$.

Bài 4: Phân tích thành thừa số phức các biểu thức

a) $a^2 + 1$ b) $4a^2 + 9b^2$ c) $2a^2 + 3$.

Hướng dẫn giải:

a) $a^2 + 1 = a^2 - i^2 = (a-i)(a+i)$

b) $4a^2 + 9b^2 = 4a^2 - 9b^2i^2 = (2a-3bi)(2a+3bi)$

c) $2a^2 + 3 = 2a^2 - 3i^2 = (a\sqrt{2} - \sqrt{3}i)(a\sqrt{2} + \sqrt{3}i)$.

III. Giải phương trình bậc hai– Tìm căn bậc hai

Bài 1: Giải các phương trình sau

a) $Z^2 = -4$ b) $Z^2 + \sqrt{2} = 0$

Hướng dẫn giải:

a) $Z^2 = -4 = 4i^2 \Leftrightarrow (Z-2i)(Z+2i) = 0 \Leftrightarrow Z = 2i \text{ hay } Z = -2i$.

b) $Z^2 + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow Z^2 = -\sqrt{2}i^2 \Leftrightarrow (Z - \sqrt[4]{2}i)(Z + \sqrt[4]{2}i) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Z = \sqrt[4]{2}i \\ Z = -\sqrt[4]{2}i \end{cases}$

Bài 2: Giải phương trình : $Z^2 = 5 - 12i$.

Hướng dẫn giải:

Đặt $Z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

$$Z^2 = 5 - 12i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, y = -2 \\ x = -3, y = 2 \end{cases}$$

Phương trình có 2 nghiệm: $Z_1 = 3 - 2i$ và $Z_2 = -3 + 2i$.

Bài 3: Giải các phương trình

a) $Z^2 + 4Z + 5 = 0$

b) $4Z^2 - 2Z + 1 = 0$.

Hướng dẫn giải:

a) $\Delta = 16 - 20 = -4 = 4i^2$. Phương trình có hai nghiệm là:

$$Z_1 = \frac{-4 - 2i}{2} = -2 - i \text{ và } Z_2 = \frac{-4 + 2i}{2} = -2 + i.$$

b) $\Delta = 4 - 16 = -12 = 12i^2 = (2\sqrt{3}i)^2$

Phương trình có hai nghiệm là: $Z_1 = \frac{2 - 2\sqrt{3}i}{8} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{4}$ và $Z_2 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{4}$.

Bài 4: Giải các phương trình:

a) $(1 - i)Z^2 - (5 - 3i)Z + 10 = 0$

b) $Z^2 + 2(i - 1)Z - 2i = 0$.

Hướng dẫn giải:

a) $\Delta = (5 - 3i)^2 - 40(1 - i) = -24 + 10i = (1 + 5i)^2$

Phương trình có 2 nghiệm: $Z_1 = \frac{5 - 3i - (1 + 5i)}{2(1 - i)} = \frac{4 - 8i}{2(1 - i)} = 3 - i$ và

$$Z_2 = \frac{5 - 3i + 1 + 5i}{2(1 - i)} = \frac{6 + 2i}{2(1 - i)} = 1 + 2i.$$

b) $\Delta = 4(i - 1)^2 + 8i = 0$. Phương trình có nghiệm kép là: $Z = 1 - i$.

Bài 5:

a) Giải phương trình: $Z^2 - 2\cos\alpha \cdot Z + 1 = 0$.

b) Chứng minh rằng phương trình: $Z^4 - 4Z^3 + 14Z^2 - 36Z + 45 = 0$ có 2 nghiệm là số thuần ảo.

Hướng dẫn giải:

a) $\Delta = 4\cos^2\alpha - 4 = -4\sin^2\alpha = 4i^2\sin^2\alpha = (2i\sin\alpha)^2$.

Phương trình có hai nghiệm:

$$Z_1 = \frac{2\cos\alpha - 2i\sin\alpha}{2} = \cos\alpha - i\sin\alpha$$

và $Z_2 = \frac{2\cos\alpha + 2i\sin\alpha}{2} = \cos\alpha + i\sin\alpha$.

b) Đặt $Z = bi \Rightarrow Z^2 = -b^2; Z^3 = -ib^3, Z^4 = b^4$

$Z = bi$ là nghiệm $\Leftrightarrow b^4 - 4(-ib^3) + 14(-b^2) + 36ib + 45 = 0$

$$\Leftrightarrow (b^4 - 14b^2 + 45) + i(4b^3 - 36b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b^4 - 14b^2 + 45 = 0 \\ 4b^3 - 36b = 0 \end{cases} \Rightarrow b = \pm 3$$

Vậy: $\pm 3i$ là nghiệm của phương trình.

III. Dạng lượng giác của số phức

Bài 1: Cho các số phức:

$$Z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}; Z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i; Z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}; Z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

a) Biểu diễn về dạng lượng giác các số phức trên.

b) Xác định tích: $Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4$.

Hướng dẫn giải:

a) Đề ý: $|Z_1| = |Z_2| = |Z_3| = |Z_4| = 1$

Ta có dạng lượng giác của các số phức:

$$Z_1 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}; Z_2 = \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)$$

$$Z_3 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}; Z_4 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

b) Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 có môđun bằng 1 và argument $\varphi = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}$.

Hay $\varphi = 2\pi$ do đó : $Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 = 1$.

Bài 2: Cho $Z = 1 + \sqrt{3}i$. Viết về dạng lượng giác của Z rồi suy ra Z^5 .

Hướng dẫn giải:

$$Z = 1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$Z^5 = 2^5 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 2^5 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right).$$

Bài 3: Chứng minh $\left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{2007}$ là một số thực.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Dạng lượng giác của : } Z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$\text{Do đó: } Z^{2007} = 1(\cos 1338\pi + i \sin 1338\pi) = 1. \text{ Dpcm.}$$

Bài 4: Cho $Z_1 = 1 + \sqrt{3}i, Z_2 = 1 - i$, đặt $Z = \frac{Z_1}{Z_2}$.

a) Xác định dạng lượng giác của Z .

b) Suy ra các giá trị : $\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \sin \frac{7\pi}{12} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải:

a) $Z_1 = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

$$Z_2 = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \sqrt{2} \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{Do đó } Z = \frac{Z_1}{Z_2} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right).$$

b) Đề ý rằng : $Z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i$

Do đó: $\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}; \sin \frac{7\pi}{12} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Bài 5: Tính theo hai cách khác nhau: $(1+i)^n$ và $(1-i)^n$ từ đó suy ra giá trị

$$S_n = 1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots + (-1)^p \cdot C_n^{2p} + \dots$$

Hướng dẫn giải:

$$1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow (1+i)^n = (\sqrt{2})^n \cos n \frac{\pi}{4} + i \sin n \frac{\pi}{4}$$

$$1-i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow (1-i)^n = (\sqrt{2})^n \cos n \frac{\pi}{4} - i \sin n \frac{\pi}{4}$$

Do đó: $(1+i)^n + (1-i)^n = (\sqrt{2})^n \cos n \frac{\pi}{4}$.

Mặt khác: $(1+i)^n = 1 + C_n^1 i + C_n^2 i^2 + C_n^3 i^3 + \dots + C_n^n i^n$

$$(1-i)^n = 1 - C_n^1 i + C_n^2 i^2 - C_n^3 i^3 + \dots + (-1)^n C_n^n i^n$$

Do đó : $S_n = \frac{1}{2} (\sqrt{2})^n \cdot \cos n \frac{\pi}{4} = (\sqrt{2})^{n-2} \cos n \frac{\pi}{4}$.

C. Câu hỏi trắc nghiệm về số phức

Câu 1: Cho các số phức : $Z_1 = 2 + 3i; Z_2 = 3 - i; Z_3 = 2i; Z_4 = -4 + 2i; Z_5 = -4$.

Các số phức nào biểu diễn trong mặt phẳng tọa độ là 3 điểm thẳng hàng:

- A. Z_1, Z_2, Z_3 B. Z_1, Z_3, Z_5 C. Z_2, Z_3, Z_4 D. Z_1, Z_2, Z_5 .

Câu 2: Cho số phức $Z = 1 + 2i$. Số phức đối của Z là số phức nào dưới đây

- A. $-1 + 2i$ B. $1 - 2i$ C. $-1 - 2i$ D. $-2i$.

Câu 3: Hãy chọn mệnh đề sai dưới đây:

- A. Hai số phức đối nhau có hình biểu diễn là hai điểm đối nhau qua gốc O.
 B. Hai số phức liên hợp có hình biểu diễn là hai điểm đối xứng nhau qua Cx.
 C. Số 0 là số phức vừa là số thực vừa là số ảo.

D. Hai số phức $Z_1 = a$ và $Z_2 = ai$ ($a \in R$). Có điểm biểu diễn trong mặt phẳng tọa độ trùng nhau.

Câu 4: Cho số phức $Z = 1 + bi$, khi b thay đổi tập hợp các điểm biểu diễn của Z trong mặt phẳng tọa độ là:

- A. Đường thẳng $x - 1 = 0$ B. Đường thẳng $y - b = 0$
C. Đường thẳng $x - y - b = 0$ D. Đường thẳng $bx + y - 1 = 0$.

Câu 5: Tập hợp các điểm biểu diễn của các số phức $Z = a + ai$ ($a \in R$) khi a thay đổi là :

- A. Đường thẳng $y = ax$ B. Đường thẳng $y = ax + a$
C. Đường thẳng $y = x$ D. Đường thẳng $y = -x$.

Câu 6: Cho số phức : $Z = a + bi$ ($a, b \in R$). Để điểm biểu diễn của Z trong mặt phẳng tọa độ nằm trong đường tròn tâm O bán kính $R = 2$ thì điều kiện của a, b là:

- A. $a^2 + b^2 = 4$ B. $a^2 + b^2 = 2$ C. $a^2 + b^2 < 4$ D. $a^2 + b^2 > 4$.

Câu 7: Mệnh đề nào dưới đây là sai :

- A. $1 + i + i^2 + i^3 = 0$ B. $Z + \bar{Z}$ là một số thực
C. $\overline{Z \cdot Z'} = \bar{Z} \cdot \bar{Z'}$ D. $(2 + 3i)(1 - 2i) = -4 - i$.

Câu 8: Mệnh đề nào dưới đây là sai :

- A. $(i - 1)^4$ là một số thực B. $\frac{2 + i}{i} = 1 - 2i$
C. $\frac{1 + i}{1 - 2i} = -\frac{1}{3} + \frac{3}{5}i$ D. $Z - \bar{Z}$ là số ảo.

Câu 9: Biểu diễn về dạng $Z = a + bi$ của số phức $\frac{-2}{1 - \sqrt{3}i}$ là số phức nào dưới đây:

- A. $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ B. $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ C. $-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$ D. $\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$.

Câu 10: Biểu diễn về dạng $Z = a + bi$ của số phức $\frac{5 + i\sqrt{2}}{1 + i}$ là số phức nào dưới đây:

A. $\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

B. $\frac{5-\sqrt{2}}{2} + \frac{5+\sqrt{2}}{2}i$

C. $\frac{5+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}-5}{2}i$

D. $\frac{5+\sqrt{2}}{2} + \frac{5-\sqrt{2}}{2}i$

Câu 11: Số phức $\frac{4+3\sqrt{3}+(4\sqrt{3}-3)i}{1+\sqrt{3}i}$ được biểu diễn dạng $a+bi$ là:

A. $3+4i$

B. $4-3i$

C. $\sqrt{3}+4i$

D. $4+3\sqrt{3}i$

Câu 12: Môđun của số phức $Z = 2008 - 2008i$ là:

A. 2008

B. $2008\sqrt{2}$

C. 4016

D. $1004\sqrt{2}$

Câu 13: Môđun của số phức $Z = (1-i)(3\sqrt{2}-\sqrt{7}i)$ là:

A. $5\sqrt{2}$

B. $3\sqrt{2}+\sqrt{7}$

C. $5\sqrt{7}$

D. $25+\sqrt{2}$

Câu 14: Cho M và M' lần lượt là các điểm biểu diễn của số phức Z và Z'. Mệnh đề nào dưới đây là sai:

A. $|Z| = OM$

B. $|Z' - Z| = MM'$

C. $|Z'| - |Z| = MM'$

D. $|Z + Z'| \leq |Z| + |Z'|$

Các phương trình được giải trong tập hợp các số phức

Câu 15: Nghiệm của phương trình: $Z^2 = -9$ là:

A. $Z = 3i$

B. $Z = -3i$

C. $Z = 3$ hay $Z = -3$

D. $Z = 3i$ hay $Z = -3i$

Câu 16: Nghiệm của phương trình: $Z^2 + \sqrt{5} = 0$ là:

A. $\sqrt[4]{5}$ hay $-\sqrt[4]{5}$

B. $\sqrt{5}$ hay $-\sqrt{5}$

C. $\sqrt{5}i$

D. $-\sqrt{5}i$

Câu 17: Nghiệm của phương trình: $Z^2 = -5 + 12i$ là:

A. $2+3i$

B. $2-3i$

C. $2+3i$ hay $-2-3i$

D. $2-3i$ hay $-2+3i$

Câu 18: Nghiệm của phương trình: $Z^2 + 4Z + 5 = 0$ là:

A. $-2-i$

B. $2-i$ hay $2+i$

C. $-2-i$

D. $-2+i$

$$C. 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$D. \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right).$$

Câu 25: Dạng lượng giác của số phức $Z = -3 + 3i$ là:

$$A. 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$B. 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$C. 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$D. 3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

Câu 26: Dạng lượng giác của $Z = -2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ là:

$$A. 2\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right)$$

$$B. 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$C. 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$D. 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Câu 27: Dạng đại số của số phức:

$$Z = \sqrt{2}\cos 18^\circ + i\sin 18^\circ)(\cos 72^\circ + i\sin 72^\circ) \text{ là:}$$

$$A. Z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$B. Z = \sqrt{2}i$$

$$C. Z = 1 - \sqrt{2}i$$

$$D. Z = -1 + \sqrt{2}i.$$

Câu 28: Dạng đại số của số phức: $Z = \frac{\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)}{\sqrt{3}(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)}$ là:

$$A. \frac{\sqrt{6}}{3} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$B. \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$C. \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$D. \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Câu 29: Dạng lượng giác của số phức: $Z = \frac{1}{2+2i}$ là:

$$A. \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$B. \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$C. \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$D. \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Câu 30: Dạng lượng giác của số phức: $Z = \frac{1 + \sqrt{6} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})i}{1 - \sqrt{2}i}$ là:

A. $2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$

B. $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

C. $\frac{1}{2}\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$

D. $\frac{1}{2}\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$.

Câu 31: Mệnh đề nào dưới đây là sai :

A. $Z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{4}$ có môđun bằng $\sqrt{\frac{3}{4}}$

B. $Z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow Z^{12} = 1$

C. $Z = \cos 12^\circ + i \sin 12^\circ \Rightarrow Z^5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

D. $(1+i)^{16} = 2^8$

Câu 32: Dạng đại số của $Z = \left(\frac{-\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^{12}$ là :

A. -64

B. 12

C. $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

Câu 33: Cho $Z = 3 + 4i$. Tìm căn bậc hai của Z

A. $2+i$ và $2-i$

B. $-2+i$ và $2-i$

C. $2+i$ và $-2-i$

D. $\sqrt{3}+2i$ và $-\sqrt{3}-2i$.

Câu 34: Cho $Z = 1-i$. Tìm căn bậc 2 dạng lượng giác của Z .

A. $\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$

B. $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

C. $\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)$

D. $\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i \sin \frac{\pi}{8}\right)$

và $\sqrt[4]{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{8}\right)$

và $\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{8}\right)\right)$

D. Hướng dẫn giải trắc nghiệm số phức

Câu 1: Kiểm tra các điểm $M_1(2,3)$, $M_3(0,2)$ và $M_5(-4,0)$ thẳng hàng.

Chọn câu B.

Câu 2: $Z = a + bi \Rightarrow -Z = -a - bi$. Chọn câu C.

Câu 3: $Z_1 = a$ có điểm biểu diễn là $M_1(a,0)$.

$Z_2 = ai$ có điểm biểu diễn là $M_2(0,a)$.

$M_1 \neq M_2$, do đó D sai. Chọn câu D.

Câu 4: Biểu diễn của Z là điểm $M(1,b)$. Khi b thay đổi thì tập hợp các điểm M là đường thẳng: $x = 1$. Chọn câu A.

Câu 5: Số phức $Z = a + ai$ có điểm biểu diễn là $M(a,a)$. Do đó khi a thay đổi thì tập hợp các điểm M là đường thẳng $y = x$. Chọn câu C.

Câu 6: Điểm biểu diễn của Z là $M(a,b)$. Để M ở bên trong đường tròn

tâm O bán kính $R = 2$ thì phải có: $OM = \sqrt{a^2 + b^2} < 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 < 4$. Chọn câu C.

Câu 7: Để ý: $i^2 = -1$; $i^3 = -i$, do đó A đúng.

. Câu B và C đúng (Tính chất của số phức liên hợp).

$(2 + 3i)(1 - 2i) = 8 - i$. Chọn câu D.

Câu 8: $(i - 1)^4 = -4$, mệnh đề A đúng.

$\frac{2+i}{i} = (2+i)(-i) = 1 - 2i$. Mệnh đề B đúng.

$\frac{1+i}{1-2i} = \frac{(1+i)(1+2i)}{1+4} = \frac{-1+3i}{5}$. Mệnh đề C sai.

$Z - \bar{Z}$ là số ảo đúng. Chọn câu C.

Câu 9: $\frac{-2}{1-\sqrt{3}i} = \frac{-2(1+\sqrt{3}i)}{1^2 + \sqrt{3}^2} = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Chọn câu A.

Câu 10: $\frac{5+i\sqrt{2}}{1+i} = \frac{(5+i\sqrt{2})(1-i)}{2} = \frac{1}{2}(5+\sqrt{2}) + (\sqrt{2}-5)i$. Chọn câu C

Câu 11: Thực hiện phép tính thích hợp thì được dạng $Z = 4 - 3i$. Chọn câu B.

Câu 12: $Z = 2008(1-i) \Rightarrow |Z| = 2008|1-i| = 2008\sqrt{2}$. Chọn câu B.

Câu 13: $|Z| = |1-i||3\sqrt{2} - i\sqrt{7}| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{25} = 5\sqrt{2}$. Chọn câu A.

Câu 14:

Đề ý: $Z = a + bi$ có điểm biểu diễn là $M(a, b)$.

$Z' = (a' + b'i)$ có điểm biểu diễn là $M'(a', b')$.

$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2} = OM$: A đúng.

$Z' - Z = (a' - a) + (b' - b)i \Rightarrow |Z' - Z| = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2} = MM'$: B đúng.

$|Z + Z'| \leq |Z| + |Z'|$ đúng (bất đẳng thức về đoạn thẳng). Vậy C sai.

Chọn câu C.

Câu 15: $Z^2 = -9 = 9i^2 = (3i)^2$.

Phương trình tương đương: $(Z - 3i)(Z + 3i) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Z = 3i \\ Z = -3i \end{cases}$.

Chọn câu D.

Câu 16: $Z^2 = -\sqrt{5} = \sqrt{5}i^2$

$\Leftrightarrow Z = \pm \sqrt[4]{5}i$. Chọn câu A.

Câu 17: Đề ý: $(2 + 3i)^2 = -5 + 12i$, do đó:

$Z^2 = -5 + 12i \Leftrightarrow Z^2 = (2 + 3i)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} Z = 2 + 3i \\ Z = -2 - 3i \end{cases}$. Chọn câu C.

Câu 18: $\Delta = -4 = 4i^2 = (2i)^2$, nghiệm của phương trình là:

$Z_1 = -2 - i$ hay $Z_2 = -2 + i$. Chọn câu B.

Câu 19: ΔAM_1M_2 cân tại A nên $M_1A = M_1M_2$ hay:

$|Z_1 - 1 + 2i| = |Z_2 - 1 + 2i|$. Chọn câu B.

Câu 20: Gọi A là điểm biểu diễn số phức $-3i$.

$|Z - 3i| = 2 \Leftrightarrow AM = 2$: Tập hợp các điểm M là đường tròn A bán kính bằng 2. Chọn câu A.

Câu 21: Đề ý: $|Z + 1 + 2i| = |Z - 4| \Leftrightarrow IM = JM$.

Do đó tập hợp các điểm M là trung trực đoạn IJ. Chọn câu B.

Câu 22: Ta có: $A(2, -1), B(3, 2), C(-1, 4)$ và $D(-2, 1)$.

Do đó: $\overrightarrow{AB} = (1, 3), \overrightarrow{DC} = (1, 3)$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow ABCD$ là hình bình hành.

Kiểm tra $AB \neq BC$, $\widehat{ABC} \neq 90^\circ$. Chọn câu B.

Câu 23: $Z = 1 + \sqrt{3}i = 2\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$. Chọn câu D.

Câu 24: $Z = \sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$. Chọn câu B.

Câu 25: $Z = 3\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
 $= 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$. Chọn câu C.

Câu 26: $Z = -2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(-\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$.

Chọn câu B.

Câu 27:

$$\sqrt{2} = (\cos 18^\circ + i\sin 18^\circ)(\cos 72^\circ + i\sin 72^\circ) = \sqrt{2}(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ) = \sqrt{2}i.$$

Chọn câu B.

Câu 28: Nếu $Z = \frac{\sqrt{6}}{3}(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{6}$. Chọn câu C.

Câu 29: $Z = \frac{1}{2+2i} = \frac{1}{4}(1-i) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$
 $Z = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$. Chọn câu C.

Câu 30: $Z = \frac{(1 + \sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2}i)(1 + \sqrt{2}i)}{3} = 1 + \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}i\right)$

$Z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$. Chọn câu A.

Câu 31: $Z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow |Z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}}$

$$Z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow Z^{12} = \cos 4\pi + i \sin 4\pi = 1$$

$$Z = \cos 12^\circ + i \sin 12^\circ \Rightarrow Z^5 = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$(1+i)^{16} = \left[\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right]^{16} = 2^8. \text{ Chọn câu C.}$$

Câu 32: Ta có: $\frac{-\sqrt{3}+i}{1+i} = \frac{2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12}\right)$

$$Z^{12} = 2^6(\cos 5\pi + i \sin 5\pi) = -64. \text{ Chọn câu A.}$$

Câu 33: Gọi $a + bi$ là căn bậc hai của Z , ta có

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2, b = 1 \\ a = -2, b = -1 \end{cases}$$

Có hai căn bậc hai của Z là $2 + i$ và $-2 - i$. Chọn câu C.

Câu 34: $Z = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i \sin \frac{-\pi}{4}\right)$, do đó có hai căn bậc 2 của Z

$$\text{là: } \sqrt[4]{2}\left(\cos -\frac{\pi}{8} + i \sin\left(\frac{-\pi}{8}\right)\right) \text{ và } \sqrt[4]{2}\left(\cos \frac{7\pi}{8} + i \sin \frac{7\pi}{8}\right). \text{ Chọn câu C.}$$

E. Bài tập trắc nghiệm về số phức

Câu 1: Khi a thay đổi, tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $Z = a - 2i$ là:

- A. Đường thẳng $x = -2$ B. Đường thẳng $x = 2$
C. Đường thẳng $y = -2$ D. Đường thẳng $y = -2x + a$.

Câu 2: Cho số phức $Z = a + bi$, điều kiện để điểm biểu diễn của số phức Z (trong mặt phẳng phức) ở trong đường tròn tâm O bán kính $R = 1$ là:

- A. $|a| < 1$ và $|b| < 1$ B. $a^2 + b^2 < 1$
C. $|a| > 1$ và $|b| > 1$ D. $a^2 + b^2 > 1$.

Câu 3: Cho A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức

$Z_A = 3 - i, Z_B = -2 + 3i, Z_C = -1 - 2i$ trong mặt phẳng phức. Hãy chọn mệnh đề sai dưới đây:

- A. Điểm biểu diễn của số phức $Z = Z_A + Z_B + Z_C$ là trọng tâm ΔABC .
B. $Z_B + Z_C = -Z_A$.
C. Tam giác ABC vuông tại C .
D. $|Z_A| + |Z_C| > |Z_C|$.

Câu 4: Cho số phức $Z = a + bi; Z' = a' + b'i$. Điều kiện để tích của ZZ' là số ảo là:

- A. $aa' + bb' = 0$ B. $ab' + ba' = 0$
C. $aa' - bb' = 0$ D. $aa' - bb' = 0$ và $ab' + ba' \neq 0$.

Câu 5: Cho $Z = a + bi, Z' = a' + b'i$. Để $\frac{Z}{Z'}$ là số thực thì điều kiện giữa a và b là:

- A. $aa' + bb' = 0$ B. $aa' + bb' \neq 0$ C. $a'b = b'a$ D. $aa' = bb'$.

Câu 6: Cho $Z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Mệnh đề nào dưới đây là đúng.

- A. Z^2 là số thực khi $a = 0$ hay $b = 0$ B. Z^2 là số ảo khi $a = b$
C. Z^3 là số thực khi và chỉ khi $b = 0$ D. $Z = \bar{Z}$ khi và chỉ khi $b = 0$.

Câu 7: Dạng $a + bi$ của số phức $Z = \frac{1+2i}{(1+i)(1-3i)}$ là:

- A. $1 + \frac{i}{2}$ B. $-1 + \frac{i}{2}$ C. $\frac{i}{2}$ D. $-\frac{i}{2}$.

Câu 8: Dạng đại số của số phức $Z = \frac{(1+i)^{13}}{(1-i)^7}$ là:

- A. $8+8i$ B. -8 C. $8i$ D. $\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$.

Câu 9: Để $(1+i)^n$ là một số thực thì n là:

- A. $n=2k$ ($k \in \mathbb{N}^+$) B. $n=3k$ ($k \in \mathbb{N}^+$)
C. $n=2k+1$ ($k \in \mathbb{N}^+$) D. $n=4k$ ($k \in \mathbb{N}^+$).

Câu 10: Dạng đại số của $Z = (1-i)^3$ là:

- A. $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$ B. $-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$ C. $\frac{1}{8} + \frac{1}{8}i$ D. $-\frac{1}{8} + \frac{1}{8}i$.

Câu 11: Dạng đại số $Z = \frac{1-3i}{i-2} + \frac{4i+1}{3i-1}$ là

- A. $\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$ B. $\frac{1}{10} - \frac{3}{10}i$ C. $\frac{3}{10} - \frac{1}{10}i$ D. $\frac{3}{10} + \frac{1}{10}i$.

Câu 12: Dạng lượng giác của số phức $Z = -2 + 2\sqrt{3}i$ là :

- A. $4\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$ B. $4\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$
C. $4\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$ D. $16\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$.

Câu 13: Cho $Z_1 = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$; $Z_2 = 3\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right)$.

Dạng đại số của tích $Z_1 Z_2$ là:

- A. $6+6i$ B. $2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$ C. $3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$ D. $-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$.

Câu 14: Dạng đại số của $Z = \frac{10\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)}{2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)}$ là:

- A. $5+5i$ B. $5i$ C. 5 D. $5-5i$.

Câu 15: Dạng lượng giác của $\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{10}$ là:

- A. $\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)$ B. $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$
 C. $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ D. $\sqrt{3}\left(\cos-\frac{\pi}{3} + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

Câu 16: Cho $Z = i$. Tìm căn bậc hai của Z

- A. $\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$ và $\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}$
 B. $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ và $\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$
 C. $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ và $\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$
 D. $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ và $\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$.

Câu 17: Phương trình $Z^2 + Z + 1 = 0$ có nghiệm phức là:

- A. $Z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ và $Z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
 B. $Z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ và $Z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
 C. $Z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ và $Z_2 = 1 - \sqrt{3}i$
 D. $Z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ và $Z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

Câu 18: Các căn bậc hai của số phức $Z = -9$ là:

- A. $\pm\sqrt{3}$ B. ± 3 C. $\pm 3i$ D. $\pm 9i$.

Câu 19: Các căn bậc hai của $Z = 1 + 4\sqrt{3}i$ là

- A. $2 + \sqrt{3}i$ và $2 - \sqrt{3}i$ B. $\sqrt{3} + 2i$ và $\sqrt{3} - 2i$
 C. $2 + \sqrt{3}i$ và $-2 - \sqrt{3}i$ D. $-\sqrt{3} + 2i$ và $\sqrt{3} + 2i$.

Câu 20: Nghiệm của phương trình $Z^2 + 2Z + 5 = 0$ là:

- A. $2 \pm i$ B. $-1 \pm 2i$ C. $1 \pm i$ D. $2 \pm 2i$.

Câu 21: Cho phương trình $Z^2 + (2 - i)Z + 3 + 5i = 0$ có 2 nghiệm là Z_1 và Z_2 , số phức nào dưới đây bằng $Z_1^2 + Z_2^2$?

- A. $3 + 14i$ B. $-3 - 14i$ C. $13 + 14i$ D. $13 - 14i$.

Câu 23: Nghiệm của phương trình $Z = \frac{Z}{Z + i}$ là:

- A. $Z = 0, Z = 1 - i$ B. $Z = 1 \pm i$ C. $Z = \pm i$ D. $Z = 0, Z = 1$.

Câu 24: Đề $(x + iy)^2 - 2(x + iy) + 5$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là một số thực thì giá trị của x, y là:

- A. $x = 1, y = 0$ B. $x = 0, y = 1$ C. $x = y = 1$ D. $x = y = -1$.

Câu 25: Dạng lượng giác của số phức: $Z = \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} + i$ là:

- A. $\frac{1}{\cos \frac{\pi}{8}} \left(\sin \frac{\pi}{8} + i \cos \frac{\pi}{8} \right)$ B. $\frac{1}{\cos \frac{\pi}{8}} \left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right)$
C. $\frac{1}{\cos \frac{\pi}{8}} \left(\cos \frac{7\pi}{8} + i \sin \frac{7\pi}{8} \right)$ D. $\frac{1}{\sin \frac{\pi}{8}} \left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right)$.

Câu 26: Tập hợp các điểm biểu diễn số phức Z thỏa: $|Z - i| = 1$ là:

- A. Đường tròn tâm O bán kính $R = 1$.
B. Đường tròn tâm $I(0, 1)$ bán kính $R = 1$.
C. Đường thẳng có phương trình $x = 1$.
D. Đường thẳng có phương trình $y = 1$.

Câu 27: Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức Z thỏa Z^2 là số ảo là:

- A. Đường tròn có phương trình: $x^2 + y^2 = 1$.
B. Các đường thẳng $y = x$.
C. Đường thẳng $y = -x$.
D. Các đường thẳng $y = x$ và $y = -x$ loại trừ gốc O.

Câu 28: Giá trị của $(1 + i)^8$ là:

- A. 8 B. 4 C. 16 D. 24.

Câu 29: Giá trị của $\left(\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}\right)^{-8}$ là:

- A. $\frac{1}{8}$ B. 8 C. 4 D. 1.

Câu 30: Dạng đại số của $(\cos 35^\circ + i \sin 35^\circ)^{-12}$ là:

- A. $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ B. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ C. $\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ D. $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Câu 31: Cho A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức Z_1, Z_2, Z_3

thỏa $|Z_1| = |Z_2| = |Z_3|$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng.

- A. $\triangle ABC$ đều.
B. O là trọng tâm tam giác ABC.
C. O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.
D. Trọng tâm của $\triangle ABC$ là điểm biểu diễn của số phức $Z_1 + Z_2 + Z_3$.

Câu 32: Tìm $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa: $-2 + 5ix - 3iy = 9i + 2x - 4y$ là:

- A. $x = 2, y = 3$ B. $x = 3, y = 2$ C. $x = 3, y = 5$ D. $x = 5, y = 3$.

Câu 33: Dạng đại số của $\frac{\sqrt{27} + \sqrt{8}i}{\sqrt{3} + \sqrt{2}i}$ là

- A. $1 - \sqrt{6}i$ B. $\sqrt{6} + i$ C. $-1 + \sqrt{6}i$ D. $2\sqrt{6} - i$.

Câu 34: Nghiệm của phương trình $Z^3 = 8$ trong tập hợp số phức là

- A. $Z = 2$ B. $Z_1 = 2, Z_2 = -1 + \sqrt{3}i$
C. $Z_1 = 2, Z_2 = -1 + \sqrt{3}i, Z_3 = -1 - \sqrt{3}i$ D. $Z = -1 \pm \sqrt{3}i$.

Câu 35: Nghiệm của hệ $\begin{cases} Z_1 + Z_2 = 4 - i \\ Z_1 Z_2 = 5(1 - i) \end{cases}$ là

- A. $Z_1 = 3 + i, Z_2 = 1 - i$ B. $Z_1 = -3 + i, Z_2 = 7 - 2i$
C. $Z_1 = 5 + i, Z_2 = -1 - 2i$ D. $Z_1 = 3 + i, Z_2 = 1 - 2i$.

Câu 36: Giá trị của $\left(\frac{5 + 3\sqrt{3}i}{1 - 2\sqrt{3}i}\right)^{2007}$ là:

- A. 1 B. 2^{2007} C. -2^{2007} D. 2^{4014} .

Câu 37: Cho số phức Z thỏa : $Z^3 = 1 - i$. Argument của Z là:

- A. $-\frac{\pi}{4} + k2\pi$ B. $-\frac{\pi}{12} + k2\pi$ C. $-\frac{\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3}$.

Câu 38: Mệnh đề nào dưới đây là đúng:

- A. $\forall a \in \mathbb{R}, Z = \frac{1+ia}{1-ia}$ có $|Z| = 1$.
- B. $Z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ có dạng lượng giác là $Z = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.
- C. $(1+i)^8 = -16$.
- D. $Z = a + bi \Rightarrow Z^2 = (\bar{Z})^2$.

Câu 39: Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức Z thỏa $|Z - i| = |Z + i|$ là:

- A. Trục Oy B. Trục Ox
- C. Đường thẳng $y = x$ D. Đường thẳng $y = -x$.

Câu 40: Trong tập hợp các số phức, phương trình $Z^2 - 4\bar{Z} - 5 = 0$ có số nghiệm là:

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4.

Đáp Án

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Chọn	C	B	C	D	C	A	C	B	D	B
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Chọn	A	B	C	B	A	A	A	C	C	B
Câu	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Chọn	B	A	A	B	B	B	D	C	D	A
Câu	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Chọn	C	B	A	C	D	B	C	A	B	D

Chương 5: Trắc nghiệm tổng hợp

I. Trắc nghiệm về hàm số

Câu 1: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{2}{3} \sin^3 x$ là:

A. $y' = 2 \cos^2 x$

B. $y' = \frac{2}{3} \sin^2 x$

C. $y' = 2 \sin^2 x \cos x$

D. $y' = 2 \cos^2 x \sin x$.

Câu 2: Hàm số $y = x^3 - 3ax^2 + ax + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

A. $-\frac{1}{3} < a < 0$

B. $a = -\frac{1}{3}$ hay $a = 0$

C. $a < -\frac{1}{3} \vee a > 1$

D. $0 \leq a \leq \frac{1}{3}$.

Câu 3: Hàm số $y = \frac{x^2 - x - 12}{x + 3}$ có:

A. Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -3$.

B. Tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x - 4$.

C. Tâm đối xứng của đồ thị là $I(-3, -7)$.

D. Cả ba câu trên đều đúng.

Câu 4: Đồ thị hàm số $y = x^3 + x - 7$ cắt trục Ox tại:

A. Ba điểm phân biệt

B. Hai điểm phân biệt

C. Một điểm duy nhất

D. Không cắt Ox .

Bài 5: Đồ thị hàm số : $y = \frac{x^4}{12} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 5$ lồi trong khoảng:

A. $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$

B. $(1, 3)$

C. $(-\infty, 3)$

D. $(1, \infty)$.

Bài 6: Trên đồ thị hàm số : $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$, số cặp điểm A, B mà tiếp tuyến tại đó vuông góc nhau là:

A. Vô số cặp

B. Không có

C. Một cặp

D. Hai cặp.

Câu 7: Họ đường cong $y = x^3 - mx^2 + (3m - 2)x - 2m$ có điểm cố định à

A. $(1, -1)$

B. $(2, 4)$ và $(-1, 1)$

C. $(1, -1)$ và $(2, 4)$

D. $(2, 4)$.

Câu 8: Trên đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có:

A. Vô số cặp điểm A, B mà tiếp tuyến tại đó song song nhau.

B. Một cặp điểm A, B mà tiếp tuyến tại đó song song nhau.

C. Không có cặp điểm A, B mà tiếp tuyến tại đó song song nhau.

D. Cả 3 câu trên đều sai.

Câu 9: Hai đồ thị $y = x^3 - 5x$ và $y = x^2 + 3$ tiếp xúc nhau tại điểm:

A. $(-1, 4)$

B. $(5, 28)$

C. Không tiếp xúc nhau

D. $(-1, 4)$ và $(5, 28)$.

Câu 10: Hàm số $y = e^x \cos x$ thỏa:

A. $y^{(4)} = 4y$

B. $y^{(4)} = -4y$

C. $y^{(4)} = \frac{1}{4}y$

D. $y^{(4)} = -\frac{1}{4}y$.

Câu 11: Đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ có tâm đối xứng là

A. $(0, 1)$

B. $(1, 0)$

C. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

D. $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Câu 12: Cho họ đường cong có phương trình

$y = \frac{x^2 + (m+1)x - m - 4}{x + m}$. Tập hợp các điểm trong mặt phẳng mà mọi đồ thị

đều không đi qua là:

A. Đường thẳng $y = x - 1$

B. Đường thẳng $y = x - 1$ loại A(2, 1)

C. Đường thẳng $y = 1 - x$

D. Đường thẳng $y = 1 - x$ loại B(2, -1).

Câu 13: Hàm số $y = f(x)$ có miền xác định là $[0, 1]$ thì hàm số $f(|x| + x)$ có miền xác định là:

A. $[0, 1]$

B. $[-\infty, 1]$

C. $[-\infty, \frac{1}{2}]$

D. $[1, \infty]$.

Câu 14: Hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$ có miền giá trị là

A. $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$

B. $\left[-\infty, \frac{1}{3}\right]$

C. $[3, \infty]$

D. Một kết quả khác.

Câu 15: Cho hàm số $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, trị số c trong định lý La-grăng trên $[a, b]$ là:

- A. $\frac{-\beta}{2\alpha}$ B. $\frac{\alpha + \beta}{2}$ C. $\frac{\gamma}{2}$ D. $\frac{\alpha + \beta}{2}$

Câu 16: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Điều kiện để phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm dương phân biệt là:

- A. $y_{CD} \cdot y_{CT} < 0$ và $f(0) = 0$
 B. $y_{CD} \cdot y_{CT} < 0$ và $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm
 C. $y_{CD} \cdot y_{CT} < 0$; $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm thỏa $0 < x_1 < x_2$ và $f(0) < 0$
 D. $y_{CD} \cdot y_{CT} < 0$; $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm thỏa $x_1 < x_2 < 0$.

Câu 17: Số hạng lớn nhất của dãy số (a_n) xác định bởi: $a_n = \frac{n^2}{n^3 + 200}$ là số hạng thứ:

- A. Thứ 5 B. Thứ 7 C. Thứ 8 D. Thứ 9.

Câu 18: Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ được suy ra từ đồ thị $y = f(x)$ bằng cách:

- A. Xóa bỏ phần đồ thị dưới Ox.
 B. Xóa bỏ phần đồ thị dưới Ox và thay bằng đối xứng của nó qua Ox.
 C. Xóa bỏ phần đồ thị dưới Ox và vẽ thêm phần đối xứng của phần còn lại qua Ox.
 D. Không suy ra được.

Câu 19: Hàm số $y = f(e^x) \cdot e^{f(x)}$ có đạo hàm là:

- A. $e^{f(x)} [e^x f'(e^x) + f'(x) f(e^x)]$ B. $e^x [e^x f'(e^x) + f'(x) f(e^x)]$
 C. $e^x [e^{f(x)} + f'(x) e^x]$ D. Cả 3 câu trên đều sai.

Câu 20: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + m - 2}{x + 2}$, khi m thay đổi, các điểm cực trị (nếu có) di động trên đường thẳng.

- A. $y = 4x$ B. $y = \frac{1}{2}x$ C. $y = 2x + 3$ D. $\frac{1}{2}x + 3$.

Câu 21: Đồ thị $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ và đồ thị $y = x^2 + a$ tiếp xúc nhau thì giá trị của a là:

- A. $a = 1$ B. $a = -1$ C. $a = \frac{1}{2}$ D. $a = 0$.

Câu 22: Tìm m để hàm số $y = \frac{x^2 - mx}{x^2 - x + 1}$ có cực trị

- A. $m > 1$ B. $-1 < m < 1$ C. $\forall m \in \mathbb{R}$ D. $0 < m < 1$.

Câu 23: Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số $y = x^3 - x^2 - 3x + 1$ là:

- A. $y = -\frac{2}{9}(x + 3)$ B. $y = \frac{1}{9}(-20x + 6)$
C. $y = -\frac{1}{9}(20x - 6)$ D. $\frac{2}{9}(x - 3)$.

Câu 24: Cho $y = e^{2x} \cdot \cos 4x$. Các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng:

- A. $20y - 4y' + y'' = 0$ B. $y - 20y' + 4y'' = 0$
C. $-20y + 4y' - y'' = 0$ D. $2y + y' - 4y'' = 0$.

Câu 25: Với giá trị nào của m thì hàm số :

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(m^2 + 1)x^2 + (3m - 2)x + m \text{ đạt cực trị tại } x = 1?$$

- A. $m = 2$ B. $m = 1$
C. $m = 1$ hay $m = 2$ D. $m = -2$.

Câu 26: Cho hàm số $y = 2\cos x + \cos 2x$. Tại $x = \frac{2\pi}{3}$ thì hàm số:

- A. Đạt cực đại B. Đạt cực tiểu
C. Không đạt cực trị D. Đạt điểm uốn.

Câu 27: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + m}{x + m}$. Đồ thị hàm số cắt Ox tại $x = x_0$.

Tiếp tuyến tại giao điểm này có hệ số góc là:

- A. $\frac{2x_0 - 2m}{x_0 + m}$ B. $\frac{2x_0 - 2m}{(x_0 + m)^2}$ C. $\frac{x_0^2 - 2mx_0}{(x_0 + m)^2}$ D. $\frac{1}{(x_0 + m)^2}$.

Câu 28: Khi m thay đổi thì họ đường cong $y = \frac{x^2 - mx + m}{x + 1}$ có điểm cố định là:

- A. $(-1, 1)$ B. $(0, 1)$ C. $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

Câu 29: Cho hàm số : $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$, tiếp tuyến với đồ thị song song với đường $y = 3x$ là:

- A. $y = 3x - \frac{29}{3}$ B. $y = 3x + 1$
C. $y = 3x + 1$ và $y = 3x - \frac{29}{3}$ D. $y = 3x - 1$ và $y = 3x + \frac{29}{3}$.

Câu 30: Phương trình tiếp tuyến của $y = x^2 e^{-x}$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là:

- A. $y = ex + 1$ B. $y = \frac{1}{e}x$ C. $y = ex$ D. $y = \frac{1}{e}x + e$.

Câu 31: Hàm số $y = x + k \sin x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi :

- A. k bất kì B. Không tồn tại k
C. $|k| \leq 1$ D. $|k| > 1$.

Câu 32: Để tìm phương trình tiệm cận đứng của hàm số $y = f(x)$. Học sinh thực hiện theo cách nào sau đây:

- A. Tìm a để $f(x)$ không xác định và kết luận $x = a$ là tiệm cận đứng.
B. Tìm các điểm $x = a$ mà hàm số không liên tục và kết luận $x = a$ là tiệm cận đứng.
C. Tìm các điểm $x = a$ mà $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty$ và kết luận $x = a$ là tiệm cận đứng.
D. Tìm các điểm $x = a$ mà $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ và kết luận $x = a$ là tiệm cận đứng.

Câu 33: Cho hàm số $y = \frac{ax + b}{x^2 + 1}$ để hàm số có $Maxy = 4, Miny = -1$ thì a, b phải là:

- A. $a = \pm 4$ và $b = \pm 3$ B. $a = \pm 4$ và $b = 3$
C. $a = 4$ và $b = 3$ D. Một kết quả khác.

Câu 34: Cho hàm số $y = \frac{2x^2 - (m+1)x + m}{x+2}$. Quỹ tích các điểm cực trị là:

- A. Đường $y = 2x^2 + 12x + 1$ và $x \neq -2$
- B. Đường $y = 2x^2 + x - 1$ và $x \neq -2$
- C. Đường $y = -2x^2 + 4x + 1$ và $x \neq -2$
- D. Đường $y = 4x - (m+1)$.

Câu 35: Để đồ thị hàm số: $y = x^3 - 3mx^2 + 2m(m-4)x + 9m^2 - m$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ tạo thành cấp số cộng thì giá trị của m là:

- A. $m = -1$
- B. $m = 1$
- C. $m = 2$
- D. $m = -2$

Câu 36: Với giá trị nào của m thì hàm số $y = \frac{2x^2 - mx + m}{x+2}$ có 2 cực trị có giá trị cùng dấu

- A. $0 < m < 8$
- B. $-\frac{8}{3} < m < 0 \vee m > 8$
- C. $m < 0 \vee m > 8$
- D. $-\frac{8}{3} < m < 8$.

Câu 37: Với giá trị nào của a thì hàm số:

$y = \frac{1}{3}x^3 - 2(a+1)x^2 - (2a+1)x + a$ Nghịch biến trong khoảng (1,2):

- A. $a \geq \frac{-1}{2}$
- B. $|a| \geq \frac{1}{2}$
- C. $a \leq \frac{1}{2}$
- D. $\forall a \in R$.

Câu 38: Cho hàm số $y = \frac{2x^2 - mx + m}{x-2}$. Điều kiện để hàm số có 2 cực trị và đường thẳng qua 2 cực trị là:

- A. $\begin{cases} n < 8 \\ y = -4x + m \end{cases}$
- B. $\begin{cases} m > 0 \\ y = 4x - m \end{cases}$
- C. $\begin{cases} m > 8 \\ y = -4x - m \end{cases}$
- D. $\begin{cases} m < 8 \\ y = 4x - m \end{cases}$

Câu 39: Hàm số $y = \frac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 1}$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất là:

- A. $\text{Min}y = 1, \text{Max}y = 6$
- B. $\text{Min}y = 5, \text{Max}y = 2$
- C. $\text{Min}y = -1, \text{Max}y = 5$
- D. $\text{Min}y = 3, \text{Max}y = 8$.

Câu 40: Cho hàm số $y = mx^3 + 2mx^2 - (m+3)x - 2(m-2)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng:

- A. Đồ thị hàm số có 1 điểm cố định.
- B. Đồ thị hàm số có 3 điểm cố định ở trên 1 đường thẳng.
- C. Đồ thị hàm số có 3 điểm cố định ở trên đường $y = x^2$.
- D. Đồ thị có 2 điểm cố định.

Câu 41: Đồ thị hàm số $y = 2x^4 - 2x^3 - x^2 + 2$ có 3 điểm cực trị thỏa tính chất

- A. Thẳng hàng
- B. Ở trên parabol $y = -\frac{7}{8}x^2 + \frac{1}{8}x + 2$
- C. Ở trên parabol $y = -\frac{7}{8}x^2 - \frac{1}{8}x + 2$
- D. Ở trên đường cong $y = x^3$.

Câu 42: Để hai đường cong $y = \frac{2x^2 - x - 1}{x + 1}$ và $y = -x^2 + 2m^2 + 3mx$ tiếp

xúc nhau thì m phải có giá trị là:

- A. $m = -1$ hay $m = -\frac{1}{2}$
- B. $m = 2$ hay $m = \frac{1}{2}$
- C. $m = 1$ hay $m = 2$
- D. $m = -2$ Hay $m = \frac{-1}{2}$.

Câu 43: Đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3ax^2 + a^3$ có 2 điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$ khi:

- A. $a = 1$
- B. $|a| = 1$
- C. $a = -1$
- D. $a = -2$.

Câu 44: Hàm số $f(x) = 2\sin^2 x - \sin x + 2$ có đạo hàm là:

- A. $f'(x) = 2\cos 2x - \sin x$
- B. $f'(x) = 2\sin 2x - \cos x$
- C. $f'(x) = 2\sin 2x + \cos x$
- D. $f'(x) = 2\cos 2x + \sin x$.

Câu 45: Đạo hàm cấp n của hàm số $y = \frac{1}{1-x}$ là:

- A. $y^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$
- B. $y^{(n)} = \frac{(n+1)!}{(1-x)^n}$

$$C. y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1-x)^{n+1}}$$

$$D. y^{(n)} = \frac{(-1)^n (n+1)!}{(1-x)^{n+1}}$$

II. Trắc Nghiệm Về Tích Phân

Câu 46: Cho $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$, đẳng thức nào sau đây là đúng

$$A. \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$$

$$B. \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dt$$

$$C. \int_a^b f(x) dx = - \int_a^b f(t) dt$$

$$D. \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dx$$

Câu 47: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x$ và $y = x^2$ là:

$$A. \int_0^1 (x^2 - x) dx$$

$$B. \int_0^1 (x - x^2) dx$$

$$C. \int_0^1 |x^2 - x| dx$$

D. Cả B và C đều đúng.

Câu 48: Cho $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{2^x + 1}$. Giá trị của I là:

$$A. I = 1$$

$$B. I = -1$$

$$C. I = 2$$

$$D. I = -2.$$

Câu 49: Cho $J = \int_0^{\pi/2} \frac{x}{1 + \cos x} dx$. Giá trị của J là:

$$A. J = \frac{1}{2}(\pi + 2 \ln 2)$$

$$B. J = \frac{1}{2}(\pi - 2 \ln 2)$$

$$C. J = \frac{1}{2}(2 \ln 2 - \pi)$$

$$D. J = \frac{1}{2}(2 \ln 2 + \pi).$$

Câu 50: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đường $y = \sin x$ và $2x - \pi y = 0$ là:

$$A. S = 2\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) \quad B. S = 2\left(1 + \frac{\pi}{6}\right) \quad C. S = 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \quad D. S = \left(2 - \frac{\pi}{4}\right).$$

Câu 51: Bằng phép biến đổi biến số: $x = \pi - t$ thì $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$

A. $I = \int_0^{\pi} \frac{\sin x dx}{1 + \cos^2 x}$

B. $I = \int_0^{\pi} \frac{\pi x dx}{1 + \cos^2 x}$

C. $I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x dx}{1 + \cos^2 x}$

D. $I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x dx}{1 + \cos^2 x}$

Câu 52: Cho $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^5 x dx}{\cos^5 x + \sin^5 x}$ và $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^5 x dx}{\cos^5 x + \sin^5 x}$. Các mệnh đề sau đây là đúng :

A. $I = J = \frac{\pi}{2}$

B. $I = J = \frac{\pi}{4}$

C. $I = \frac{\pi}{4}, J = -\frac{\pi}{4}$

D. $I = \frac{\pi}{6}, J = -\frac{\pi}{6}$

Câu 53: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 e^x$ là:

A. $F(x) = (x^3 + x^2 + x + 1)e^x + C$ B. $F(x) = (x^3 + x^2 + 6x + 6)e^x + C$

C. $F(x) = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C$ D. Một kết quả khác.

Câu 54: Cho hình phẳng xác định bởi : $\begin{cases} y = \sqrt{(2-x)(4+x)} \\ y = 0 \end{cases}$ quay quanh

Ox, thể tích tạo thành là:

A. $V = 36\pi$

B. $V = 18\pi$

C. $V = 18\pi^2$

D. $V = 25\pi$

Câu 55: Cho $I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{5 - 3\cos^2 x} dx$. Mệnh đề nào sau đây đúng :

A. $0 \leq I \leq \frac{\pi}{2}$

B. $\frac{\pi}{10} \leq I \leq \frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{4} \leq I \leq \frac{\pi}{2}$

D. $0 \leq I \leq \frac{\pi}{4}$

Câu 56: Cho $I = \int_0^2 \min(1, x^2) dx$. Giá trị của I là:

A. $I = \frac{2}{3}$

B. $I = \frac{3}{2}$

C. $I = \frac{4}{3}$

D. $I = \frac{1}{2}$

Câu 57 Họ nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x \ln|x|}$ là:

A. $F(x) = \ln|x| + C$

B. $F(x) = x \ln^2|x| + C$

C. $F(x) = \ln|\ln|x|| + C$

D. $F(x) = \ln|x \ln|x|| + C$.

Câu 58 Họ nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ là:

A. $F(x) = \ln\left|tg \frac{x}{2}\right| + C$

B. $F(x) = \ln|\cos x| + C$

B. $F(x) = tgx + C$

C. $F(x) = \cot x + C$.

Câu 59 Giá trị của tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^8 + 1} dx$ là:

A. $I = 2\pi$

B. $I = \frac{\pi}{2}$

C. $I = \frac{\pi}{16}$

D. $I = -\frac{\pi}{4}$

Câu 60 Diện tích phần giới hạn giữa 2 đường cong $y^2 = ax$ và $x^2 = ay$ là:

A. $S = \frac{a^2}{3}$

B. $S = 2a^2$

C. $S = \frac{1}{3a^2}$

D. $S = \frac{1}{2a^2}$.

Câu 61 Khi cho elip : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ quay quanh Ox thì vật thể tạo thành có thể tích là:

A. $V = \frac{4}{3} \pi a^2 b^2$

B. $V = \frac{4}{3} \pi ab^2$

C. $V = \frac{4}{3} \pi a^2 b$

D. $V = \frac{4}{3} \pi ab$.

Câu 62 Cho $E(x) = \int_2^x \frac{\ln t}{t} dt$. Đạo hàm của $E(x)$ là:

A. $E'(x) = x$

B. $E'(x) = \ln x$

C. $E'(x) = \frac{\ln e^x}{x}$

D. $E'(x) = \frac{\ln t}{t}$.

Câu 63 Giá trị của $A = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$ là :

A. ~~A~~ $\frac{\pi}{6}$

B. $A = \frac{\pi}{3}$

C. $A = \frac{\pi}{12}$

D. $A = \frac{\pi}{4}$.

Câu 64: Giá trị của $I = \int_{-2}^1 \min(x^2 - x - 3, x^2 + x) dx$ là.

- A. $I = \frac{31}{12}$ B. $I = -\frac{31}{12}$ C. $I = \frac{15}{2}$ D. $I = -\frac{15}{2}$.

Câu 65: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số : $y = x\sqrt{1+x^2}$, trục Ox, đường thẳng $x = 1$ là :

- A. $S = \frac{1}{3}(2\sqrt{2} + 1)$ B. $S = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$
C. $S = 2\sqrt{2} + 1$ D. $\frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$.

III. Trắc Nghiệm Về Đại Số Tổ Hợp

Câu 66: Có 5 con đường nối liền A và B có 4 con đường nối liền B và C. Một người muốn đi từ A đến C (qua B) rồi từ C trở về A (qua B). Hỏi có bao nhiêu cách chọn khác nhau nếu người đó không dùng đường đã đi qua làm đường về:

- A. Có 40 cách chọn B. Có 240 cách chọn
C. Có 72 cách chọn D. có 64 cách chọn

Câu 67: Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Số cặp thứ tự (x, y) của A mà $x + y = 8$ là:

- A. 5 cặp B. 6 cặp C. 7 cặp D. 8 cặp.

Câu 68: Cho $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ $n \in \mathbb{N}$, số cặp thứ tự (x, y) với $x \in A, y \in A$ và $x > y$ là :

- A. $\frac{n}{2}$ cặp B. $\frac{n-1}{2}$ cặp C. $\frac{n(n-1)}{2}$ cặp D. $\frac{n(n+1)}{2}$ cặp.

Câu 69: Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau, khác 0 có tổng của 3 chữ số bằng 8 là:

- A. 6 số B. 8 số C. 10 số D. 12 số.

Câu 70: Để xếp 5 nam sinh và 5 nữ sinh ngồi xen kẽ nhau quanh 1 bàn tròn thì có:

- A. $(5!)^2$ cách B. $5!.4!$ cách C. $(4!)^2$ cách D. $5.5!$ cách.

- Câu 71:** Một tổ hợp có 12 người để thành lập ban cán sự tổ gồm 1 chủ tịch, phó chủ tịch và 3 ủy viên thì có:
- A. $12 \times 11 \cdot A_{10}^3$ B. $A_{10}^3 \cdot C_{10}^3$ C. A_{12}^5 D. C_{12}^5 .
- Câu 72:** Với 5 chữ số : 1, 2, 3, 4, 5, có thể lập được bao nhiêu số gồm 5 chữ số khác nhau trong đó các chữ số 1 và 5 phải kề nhau:
- A. 24 B. 48 C. 36 D. 72
- Câu 73:** Một họ gồm n đường thẳng song song cắt một họ gồm m đường thẳng song song khác, số hình bình hành tạo thành là:
- A. $C_n^2 + C_m^2$ B. $2(C_n^2 + C_m^2)$ C. $C_n^2 \cdot C_m^2$ D. $2(C_n^2 \cdot C_m^2)$.
- Câu 74:** Một đa giác lồi có n cạnh, biết rằng 3 đường chéo không cùng phát xuất từ 1 đỉnh thì không đồng quy. Số giao điểm (không trùng với đỉnh) của các đường chéo đa giác là:
- A. $3C_n^3$ B. $C_n^3 - n$ C. C_n^4 D. $C_n^4 - n$.
- Câu 75:** Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau trong đó phải có số 0 và số 1?
- A. 42.000 số B. 24.000 số C. 60.000 số D. 26.000 số.
- Câu 76:** Có 5 quả cầu màu trắng bán kính khác nhau và 5 quả cầu màu xanh có bán kính khác nhau. Để xếp xen kẽ thành 1 dãy 10 quả cầu (2 quả kề nhau phải khác màu) thì có bao nhiêu cách?
- A. 28.800 cách B. 288.000 cách C. 18.000 cách D. 38.000 cách.
- Câu 77:** Với các chữ số 0,1,2,3,4,5 có thể lập được bao nhiêu chữ số chẵn gồm 5 chữ số phân biệt?
- A. 312 B. 521 C. 213 D. 318.
- Câu 78:** Đặt $f(x) \doteq A_{7-x}^{x-3}$, $f(x)$ có miền giá trị là:
- A. $E = \{1,2\}$ B. $E = \{2,3\}$ C. $E = \{1,2,3\}$ D. $E = \{3,4,5\}$.
- Câu 79:** Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} C_{x+1}^{y+1} = C_{x+1}^y \\ 3C_{x+1}^y = 5C_{x+1}^{y-1} \end{cases}$ là:
- A. $x = 2, y = 3$ B. $x = 3, y = 2$ C. $x = 6, y = 3$ D. $x = 3, y = 6$.
- Câu 80:** Các đẳng thức nào sau đây là đúng:
- A. $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n = 2^n$

- B. $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n = n.2^{n-1}$
 C. $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n = n.2^n$
 D. $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n = (n-1)2^n$.

Câu 81: Giá trị của tổng $S = 9^0 C_n^0 + 9^1 C_n^1 + 9^2 C_n^2 + \dots + 9^n C_n^n$ là:

- A. $S = 9^n$ B. $S = n.9^n$ C. $S = (n+1)9^n$ D. $S = 10^n$.

Câu 82: Đẳng thức nào sau đây là đúng:

- A. $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_n^n$
 B. $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$
 C. $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = (C_n^n)^2$
 D. $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = (C_{2n}^n)^2$.

Câu 83: Đặt $S = 2.1.C_n^2 + 3.2.C_n^3 + 4.3.C_n^4 + \dots + n(n-1)C_n^n$. thì Giá trị của S là:

- A. $S = n.2^n$ B. $S = n(n-1)2^{n-2}$
 C. $S = (n-1)2^{n-2}$ D. $S = n.2^{n-2}$.

Câu 84: Đặt $S = 1 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n$ thì giá trị của S là:

- A. $S = \frac{2^n + 1}{n}$ B. $S = \frac{2^n - 1}{n}$ C. $S = \frac{2^{n+1} - 1}{n}$ D. $S = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$.

Câu 85: Số hạng chứa x trong khai triển $(x^2 + \frac{1}{x})^{15}$ là:

- A. 3003 B. 3300 C. 1334 D. 3430.

Câu 86: Cho biết hệ số của số hạng thứ ba trong khai triển $(x - \frac{1}{3})^n$ bằng 5,

số hạng đứng ở giữa của khai triển là:

- A. $\frac{28}{27}x^4$ B. $\frac{28}{27}x^5$ C. $\frac{27}{28}x^6$ D. $\frac{27}{28}x^5$.

Câu 87: Khi viết : $f(x) = (1+x)^9 + (1+x)^{10} + \dots + (1+x)^{14}$ về dạng đa thức $f(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_{14}x^{14}$ thì hệ số A_1 là:

- A. $A_9 = 1324$ B. $A_9 = 3003$ C. $A_9 = 3030$ D. $A_9 = 4321$.

Câu 88: Tìm giá trị x sao cho số hạng thứ ba của khai triển $(x + x^{\log x})^5$ là 1.000.000.

A. $x = 10 \vee x = 10^{-5/2}$

B. $x = 10 \vee x = 10^{2/5}$

C. $x = 10^{5/2} \vee x = 10^{2/5}$

D. $x = 10^{5/2} \vee x = 10^{-2/5}$

Câu 89: Hệ số của số hạng thứ 3 trong khai triển của $(x^2 - \frac{1}{4})^n$ bằng 31 thì giá trị của n là

A. $n = 16$

B. $n = 20$

C. $n = 26$

D. $n = 32$.

Câu 90: Hệ số của số hạng thứ 3 trong khai triển của $(x^2 - \frac{1}{4})^n$ bằng 31 thì giá trị của n là

A. $n = 16$

B. $n = 20$

C. $n = 26$

D. $n = 32$

Đáp Án Phần Trắc Nghiệm Về Hàm Số:

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Chọn	C	D	D	C	B	B	C	A	C	B	C	C	C	A	D
Câu	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Chọn	C	A	B	A	C	B	C	B	A	A	A	A	C	C	B
Câu	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
Chọn	C	C	B	A	B	B	A	D	A	B	C	A	B	B	A
Câu	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Chọn	A	D	A	B	C	C	B	C	A	B	C	C	A	C	A
Câu	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
Chọn	B	A	C	B	D	B	A	C	D	A	B	A	B	C	C
Câu	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
Chọn	A	A	A	C	C	B	D	B	B	D	A	B	B	A	D

MỤC LỤC

Chương 1: ĐẠO HÀM-KHẢO SÁT HÀM SỐ

§1 Vấn đề 1: Đạo hàm

A. Các dạng cơ bản	
I. Bổ sung giới hạn các hàm số lượng giác – mũ – logarit	5
II. Tính đạo hàm bằng định nghĩa – ý nghĩa hình học của đạo hàm	10
III. Đạo hàm của hàm số hợp – Đạo hàm cấp cao	18
IV. Bài tập tự luyện về đạo hàm	22
B. Trắc nghiệm về giới hạn và đạo hàm	24
C. Hướng dẫn giải Trắc Nghiệm	29

§2 Vấn đề 2: Ứng dụng đạo hàm vào hàm số

A. Các dạng cơ bản	
I. Định lý Lagrange (La - Grăng)	33
II. Tính đơn điệu của hàm số	43
III. Cực Trị Của Hàm Số	54
IV. Giá trị lớn nhất – Giá trị nhỏ nhất	65
V. Tính lồi lõm – Điểm uốn	75
VI. Tiệm cận	80
B. Trắc nghiệm về ứng dụng của đạo hàm	85
C. Hướng dẫn giải trắc nghiệm về ứng dụng của đạo hàm	91

§3 Vấn đề 3: Các vấn đề về khảo sát hàm số

A. Các dạng cơ bản	
I. Khảo sát vẽ đồ thị – đồ thị chứa giá trị tuyệt đối	98
II. Tiếp tuyến – các vấn đề liên quan đến tính tiếp xúc	110
III. Biện luận số nghiệm của phương trình bằng đồ thị	119
IV. Tính chất giao điểm – khoảng cách	126
V. Quỹ tích (tập hợp điểm)	132
VI. Điểm cố định liên quan với đường cong	138
B. Trắc nghiệm về các vấn đề khảo sát hàm số	143
C. Hướng dẫn giải – trắc nghiệm	147

§4 Vấn đề 4: Bài tập trắc nghiệm tổng hợp về hàm số

Đáp án	163
--------	-----

Chương 2: NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN.

§1 Vấn đề 1: Nguyên hàm

A. Tóm tắt lý thuyết	164
I. Các áp dụng cơ bản	165
II. Bài tập áp dụng	165
III. Bài tập tự luyện	171

IV. Hướng Dẫn – Đáp số	172
B. Trắc nghiệm về nguyên hàm	174
C. Hướng dẫn giải trắc nghiệm về nguyên hàm	177

§2 Vấn đề 2: Tích phân cơ bản

I. Tóm Tắt Lý Thuyết	179
II. Áp Dụng Cơ Bản	180
III. Bài tập tự luyện	183
A. Trắc Nghiệm Về Tích Phân Cơ Bản	184
B. Hướng dẫn giải trắc nghiệm về tích phân cơ bản	188

§3 Vấn đề 3: Các phương pháp tích phân

I. Phương pháp đổi biến số	
A. Tóm tắt lý thuyết	192
B. Các áp dụng cơ bản	192
C. Bài tập áp dụng	193
D. Bài tập tự luyện	202
II. Phương pháp tích phân từng phần	
A. Tóm tắt lý thuyết	204
B. Các áp dụng cơ bản	204
C. Bài tập áp dụng	204
D. Bài tập tự luyện	208
E. Hướng Dẫn Đáp Số	209
III. Tích Phân Quy Nạp – Giới Hạn Của Tích Phân	
A. Tóm tắt lý thuyết	211
B. Bài tập áp dụng	211
C. Bài tập tự luyện	219
D. Hướng dẫn – Đáp số	220
IV. Tích phân liên kết	
A. Tóm tắt lý thuyết	221
B. Bài tập áp dụng	221
C. Bài tập tự luyện	224
D. Hướng dẫn – Đáp số	225
V. Bất Đẳng Thức Tích Phân	
A. Tóm tắt lý thuyết	226
B. Bài tập áp dụng	226
C. Bài tập tự luyện	229
D. Hướng dẫn đáp án	230
VI. Trắc nghiệm về các phương pháp tính tích phân	231
VII. Hướng dẫn giải trắc nghiệm về các phương pháp tính tích phân	235

§4 Vấn đề 4. Ứng dụng của tích phân để tính diện tích

I. Ứng dụng tích phân để tính diện tích
A. Tóm tắt lý thuyết

1. Diện tích hình thang cong	239
2. Diện tích hình phẳng	239
B. Bài tập áp dụng	240
C. Bài tập tự luyện	245
D. Hướng Dẫn – Đáp Số	245
II. Ứng dụng của tích phân để tính thể tích	246
A. Tóm tắt lý thuyết	246
B. Bài tập áp dụng	247
III. Trắc nghiệm về ứng dụng của tích phân	249
IV. Hướng dẫn giải trắc nghiệm về diện tích – thể tích	252
§5 Vấn đề 5. Trắc nghiệm tổng hợp về tích phân	254
Đáp Án	264

Chương 3: ĐẠI SỐ TỔ HỢP

§1 Vấn đề 1: Hoán vị – Chỉnh hợp – Tổ hợp

A. Tóm tắt lý thuyết	265
B. Bài tập áp dụng	265
C. Bài Tập Tự Luyện	276
D. Hướng dẫn – Đáp số	277

§2. Nhị thức Newton

A. Tóm tắt lý thuyết	279
B. Bài tập áp dụng	280
C. Bài tập tự luyện	286

§3 Vấn đề 3: Trắc nghiệm về Hoán vị – Chỉnh hợp - Tổ hợp

3.1. TRẮC NGHIỆM VỀ CÔNG THỨC NEWTON	297
HƯỚNG DẪN GIẢI TRẮC NGHIỆM VỀ CÔNG THỨC NEWTON	300
3.2. TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP ĐẠI SỐ TỔ HỢP	304
Đáp Án	309

Chương 4: SỐ PHỨC

A. Tóm tắt lý thuyết	310
B. Bài tập áp dụng	314
C. Câu hỏi trắc nghiệm về số phức	320
D. Hướng dẫn giải trắc nghiệm số phức	326
E. Bài tập trắc nghiệm về số phức	330
Đáp Án	335

Chương 5: TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP

I. Trắc nghiệm về hàm số	336
II. Trắc Nghiệm Về Tích Phân	343
III. Trắc Nghiệm Về Đại Số Tổ Hợp	346
Đáp Án Phần Trắc Nghiệm Về Hàm Số	349